物理数学 1 演習 No.10 略解 (01/6/25)

1. $z = i$ での展開は、

$$f(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+2}}(z-i)^n \,.$$

これは $0 < |z-i| < 2$ で成り立つ。$z = -i$ での展開は、$i \to -i$ とすればよい。

2. $f_2(z)$ は $z = a$ で 1 位の零点を持つから、$f_2(z) = (z-a)g(z)$ と書ける。ここで $g(a) = f_2'(a) \neq 0$. $f_1(a) \neq 0$ だから $z = a$ は $f(z)$ の 1 位の極で、$f(z) = a_{-1}/(z-a) + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$ と書ける。一方、$g(z)$, $f_1(z)$ は $z = a$ で Taylor 展開でき、

$$f(z) = \frac{f_1(a) + f_1'(a)(z-a) + \cdots}{(z-a)(g(a) + g'(a)(z-a) + \cdots)} = \frac{1}{z-a}\frac{f_1(a)}{g(a)} + \cdots$$

となる。よって $a_{-1} = f_1(a)/g(a) = f_1(a)/f_2'(a)$.

3. $f(z)$ の Laurent 展開の式を留数の定義に代入し、積分と和の順序を交換して、No.5 問題 1 の結果を用いる。

4. (a) $f(z) = a_{-1}/(z-a) + g(z)$ ($g(z)$ は $z = a$ で正則) と書けるから、$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}[a_{-1} + (z-a)g(z)] = a_{-1}$.

   (b) $f(z) = a_{-2}/(z-a)^2 + a_{-1}/(z-a) + g(z)$ と書けばよい。

   (c) 略。

5. $f(z)$ は、$z = 0$ で 2 位の極、$z = 1$ で 1 位の極を持つ。前問の結果を用いて、$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = -2$、$\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 3$.

6. $z = 0$ は真性特異点だから問題 4 の方法は使えない。問題 3 の結果を使う。$f(z) = z^2(1 + 1/z + 1/(2!z^2) + 1/(3!z^3) + \cdots) = z^2 + z + 1/2 + 1/(6z) + \cdots$ より、$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 1/6$.