物理数学 1 演習 No.11 (01/6/29)

1. 留数定理を用いて次の積分を求めよ。($z = e^{i\theta}$ と置いて、単位円上の積分に帰着させよ。)

   (a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$$

   ただし、a, b は実数で、$a > |b|$ とする。

   (b)

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \; d\theta$$

   ただし、n は正の整数。

   (c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

   ただし、$b > a > 0$ とする。

2. 留数定理を用いて次の積分を求めよ。(実軸と上半面の半円からなる積分路を考えよ。)

   (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

   (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx$$

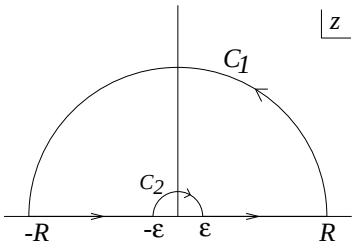
   ただし、$a > 0$ とする。

3. 階段関数

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

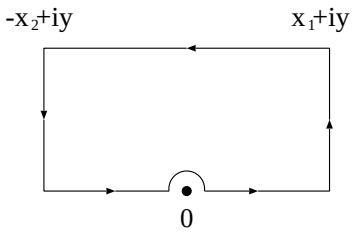
   が次のように積分で表されることを示せ。

$$\theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx$$



   ただし、P は Cauchy の主値を表す。($t > 0$ のときは図の積分路を考えればよい。$t < 0$ のときは、積分路を下半面にとればよい。)

4. 図の積分路 ($x_1, x_2, y \to \infty$) を考えることにより、積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

   を求めよ。また、原点を下半面に迂回した場合はどうなるか。