物理数学 1 演習 No.14 (00/9/7)

1. No.13 の 2 つの Γ 関数の定義が等価であることを示すために次の積分を考える。

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt\,, \quad \mathrm{Re} z > 0$$

   (a) $\lim_{n\to\infty} F(z,n) = \Gamma(z)$ であることを示せ。

   (b) $u = t/n$ と変数変換して、部分積分を繰り返すことにより

$$F(z,n) = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\, n^z$$

   を導け。これにより Euler の積分による Γ 関数の定義と Gauss の極限による定義が等価であることがわかる。

2. Γ 関数は次のように定義することもできる。(Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

   ただし

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) \quad \text{(Euler 定数)}$$

   である。(この極限は存在する。)

   (a) Gauss の定義から Weierstrass の定義を導け。

   (b) Weierstrass の定義から $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ を導け。(No.12 問題 4 の結果を用いよ。)

   (c) 前問の結果を用いて $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を示せ。

3. $\Gamma(z)$ を $z = 0$ のまわりで Laurent 展開すると

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + O(z)$$

   となることを示せ。

4. $\Gamma(z)$ のすべての極とその留数を求めよ。

5. 関数列

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{i\omega x} d\omega$$

   について、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x) dx = f(0)$$

   であることを示せ。このことから、δ 関数の 1 つの表示として、

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

   を得る。