物理数学 1 演習 No.14 略解 (01/9/11)

1. (a) $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ を用いる。

   (b) 略。

2. (a) Gauss の定義から、

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right] n^z$$

   となる。これから

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} e^{-z\log n} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

   となり、右辺に

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z\right] = \prod_{k=1}^{n} e^{z/k}$$

   をかけて割ると Weierstrass の表示を得る。

   (b)

$$\frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z}\frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \sin\pi z$$

   最後の等号は No.12 の 4 から。

   (c) 略。

3. Weiertrass の表示を用いる。

4. $z = -n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に 1 位の極を持ち、その留数は $(-1)^n/n!$.

5. 積分を実行すると

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

   となり、$y = nx$ と置くと、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin nx}{\pi x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{n}\right)\frac{\sin y}{\pi y}dy.$$

   極限と積分の順序を交換して、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{y}{n}\right)\frac{\sin y}{\pi y}dy = \frac{f(0)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy = f(0).$$

   最後の積分は No.11 の 4 から。