物理数学 1 演習 No.6 略解 (01/5/30)

1. (a) No.5 問題 5 の略解の積分路で、C_1 を C、C_2 を C_r とすればよい。

   (b) $\zeta - z = re^{i\theta}$ とおくと、

   $$\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{r \to 0} if(z) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z)$$

   (c) C の内部で $f(\zeta)/(\zeta - z)$ は正則だから、Cauchy の積分定理により 0.

2. 順に、$f(z) = e^z$ として $2\pi i$. $f(z) = 1/(z+1)$ として $2\pi i/3$. $1/(z^2+1) = [1/(z+i) - 1/(z-i)]i/2$ とした上で、$f(z) = 1$ として 0.

3.

   $$f(z + \delta z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \delta z} d\zeta$$

   などとして、積分と $\delta z \to 0$ の極限の順序を交換してやればよい。(一様収束していることに注意。)

4. 帰納法を用いればよい。

5. $n \geq 0$ のとき、被積分関数は $z \leq 1$ で正則ゆえ、0.
   $n \leq -1$ のとき、$f(z) = e^z$ として、問題 4 より

   $$1 = f^{(-n-1)}(0) = \frac{(-n-1)!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n}} d\zeta$$

   よって、答えは $2\pi i/(-n-1)!$.