物理数学 1 演習 No.8 略解 (01/6/13)

1. a の近傍で Taylor 展開すると、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)(z-a)^k/k!$ で、$f(a) = 0$. $f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ となるような $n(\geq 1)$ が存在する。このとき、

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} f^{(k)}(a)(z-a)^k/k! = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n+k)}(a)(z-a)^k/(n+k)! \equiv (z-a)^n f_n(z).$$

よって、$f_n(a) = f^{(n)}(a)/n!$.

2. (a) $f(z) \not\equiv 0$ とする。$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$ であるから、$f(z_k) = 0$ および $f(z)$ の連続性より $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = f(z_0) = 0$. よって、前問より z_0 の近傍で $f(z) = (z-z_0)^n f_n(z)$ $(f_n(z_0) \neq 0)$ と書ける。一方、$0 = f(z_k) = (z_k - z_0)^n f_n(z_k)$ で $z_k - z_0 \neq 0$ ゆえ、$f_n(z_k) = 0$. $f_n(z)$ の連続性より、$f_n(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_n(z_k) = 0$. $f_n(z_0) \neq 0$ と矛盾する。

   (b) $f(z) - g(z)$ に上の結果を適用すればよい。

3. (a) a を D の内部の点とし、M を $|f(z)|$ の最大値として、$|f(a)| = M$ とする。a を中心とする D に含まれる半径 r の円 C を考えて、

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

両辺の絶対値を考えると、

$$M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|d\theta \leq M.$$

すなわち、上式では等号が成立しているはず。よって C 上で $|f(z)| = M$. D の境界と a の距離を R とすると、$0 < r < R$ であり、この領域 K で $|f(z)| = M$. No. 3 の問題 2(c) より、K で $f(z) =$ 定数。一致の定理より D 全体で $f(z) =$ 定数 となる。

   (b) $g(z) = 1/f(z)$ は D で正則。$|g(z)|$ は D の境界で最大値をとる。よって、$|f(z)|$ は D の境界で最小値をとる。

   (c) $f(z) = 0$ が解と持たないとし $(f(z) \neq 0)$、$f(0) = a \neq 0$ とする。$|z| = R$ を十分大きくとれば $|f(z)| > |a|$ とできる。$|z| \leq R$ なる閉領域を考えると、上より $|f(z)|$ は $|z| = R$ で最小値 $(> |a|)$ をとる。$|f(0)| = |a|$ であるからこれは矛盾。

4. (a) $g(0) = f'(0)$

   (b) $|z| \leq r$ で $g(z)$ は正則ゆえ、$|g(z)|$ は $|z| = r$ で最大値をとる。$|z| = r$ のとき、$|g(z)| = |f(z)|/r \leq 1/r$.

   (c) $r \to 1$ として、$|z| < 1$ で $|g(z)| \leq 1$.

   (d) $|g(z_0)| = 1$. $|g(z)| \leq 1$ だから、$|g(z)|$ は $z \leq 1$ の内部で最大値をとることになる。よって、$g(z) =$ 定数. $|g(z_0)| = 1$ だから、$g(z) = e^{ic}$ と書ける。(c は実定数。) $|f'(0)| = 1$ のときも、$|g(0)| = 1$ だから $g(z) =$ 定数 となり同様。

5. $f'(0) = \lim_{z\to 0}(f(z) - f(0))/z$. 一方、Schwarz の定理より、$|z| < 1$ で $|(f(z) - f(0))/z| = |f(z)/z| \leq 1$. よって、$|f'(0)| \leq 1$.