物理数学 1 演習 No.9 略解 (01/6/20)

1. (a) No. 5 略解の図のような積分路を考えればよい。
   (b)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n .$$

   $|(z-a)/(\zeta - a)| < 1$ で、これは一様収束する。$f_1(z)$ の表式に代入して積分と和の順序を交換してやると、

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right] (z-a)^n .$$

   (c)

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n .$$

   $|(\zeta - a)/(z-a)| < 1$ で、これは一様収束。
   (d) $a_{-n} = (1/2\pi i) \int_{C_2} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta$.
   (e) C_1 と C_2 の間で $f(z)/(z-a)^{n+1}$ は正則ゆえ、$a_n (n \geq 0)$ の積分路 C_1 を C としてよい。$a_n (n \leq -1)$ についても同様。

2. No. 8 の問題 1 より、$f(z) = (z-a)^n f_n(z)$ と書け、$f_n(a) \neq 0$ で $f_n(z)$ は $z = a$ の近傍で正則。また、$z = a$ の近傍で $f_n(z) \neq 0$ である。(零点は孤立している。) これらより $1/f_n(z)$ は $z = a$ で正則で、

$$\frac{1}{f_n(z)} = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

   と Taylor 展開できる。ただし $a_0 \neq 0$ である。よって、

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{a_0}{(z-a)^n} + \frac{a_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots$$

   となる。

3. $f(z) = 1/z + 1 + z + z^2 + \cdots$, $0 < |z| < 1$.
   $f(z) = -1/(z-1) + 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \cdots$, $0 < |z-1| < 1$.

4. (a) $\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}/n!$.
   (b) $0 < |z| < \infty$.
   (c) 真性特異点。
   (d) $\log c$ の主値を α とすれば、$1/z = \alpha + 2\pi n i$ (n は整数). すなわち、$z = 1/(\alpha + 2\pi n i)$. $|n|$ を十分に大きくとれば、$|z|$ は任意に小さくできる。

5. 順に、n 位の極、真性特異点、真性特異点。