物理数学 1 演習 レポート問題 No.2 (01/7/13)
(提出期限:9 月 6 日午後 5 時. 提出場所は B424.)

1. 関数 $w = e^z + z$ について考える。($z = x + iy$、$w = u + iv$ とする。)
   (a) 無限直線 $y = \pm\pi$ はこの関数で半無限直線に写されることを示せ。
   (b) 無限直線 $y = \pm\pi$ を無限に広がった平行板コンデンサーと考え、上の結果を使って (半無限) 平行板コンデンサーの端の付近での等電位線を描け。
   (c) 2 枚の極板の中間 ($v = 0$) での電場を求めよ。(x の関数として表せばよい。)

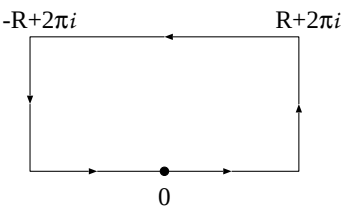
2. $f(z)$ が $|z - a| < R$ で正則で $|f(z)| \leq M$ とする。$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ と書くと $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2$ であることを示せ。($0 < r < R$ とし、$\oint_{|z-a|=r} |f(z)|^2 dz/(2\pi i z)$ を計算せよ。)

3. (a) $f(z) = \sin(1/z)$ の $0 < |z| < \infty$ での Laurent 展開を求めよ。
   (b) $z = 0$ はいかなる特異点か。
   (c) 任意の定数 b について、方程式 $\sin(1/z) = b$ は $z = 0$ の近傍に無限個の解を持つことを示せ。

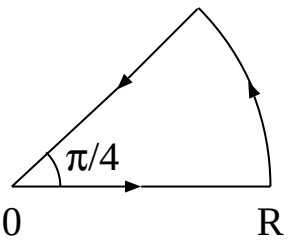
4. 次の積分を求めよ。($z = e^{i\theta}$ と置いて、単位円上の積分に帰着させよ。)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$
   ただし、$|t| \neq 1$ とする。

5. 次の積分を求めよ。(実軸と上半面の半円からなる積分路を考えよ。)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$
   ただし、$a, b > 0$ とする。

6. 図の積分路 ($R \to \infty$) を考えることにより、積分
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx$$
   を求めよ。ただし、$0 < a < 1$ とする。



7. 次の式を示せ。
$$\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx = \int_0^{\infty} \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$
   (図の積分路に沿った e^{-z^2} の積分を考えよ。)



8. 次の積分を求めよ。
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2}\, dx$$
   ただし、$a > b > 0$ とする。