1996 年度 物理数学第 2 演習 第 1 回

1. 一般の直交座標系 (q_1, q_2, q_3) での gradient

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3)$$

について考える。

(a) まず簡単な場合として円柱座標 $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$で考えよう。
円柱座標系での基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\rho,\ \boldsymbol{e}_\varphi,\ \boldsymbol{e}_z$をカーテシアン座標系での基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z$で表せ。

(b) 微小変位を $d\boldsymbol{s} = h_\rho\, d\rho\, \boldsymbol{e}_\rho + h_\varphi\, d\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi + h_z\, dz\, \boldsymbol{e}_z$ と書く時, $h_{\rho,\varphi,z}$を (ρ, φ, z) で表せ。

(c) スカラー関数$\psi(\rho, \varphi, z)$ の gradient は微小変位 $d\boldsymbol{s}$に対する$\psi(\rho, \varphi, z)$ の変化率で $d\psi = \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot d\boldsymbol{s}$ と書ける。すなわち、

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi)_i = \frac{\partial\psi}{\partial s_i}\ , \qquad ds_i = \boldsymbol{e}_i \cdot d\boldsymbol{s}, \quad i = \rho, \varphi, z\ .$$

上の結果を用いて$\boldsymbol{\nabla}\psi$の円柱座標系での表示を求めよ。

(d) 一般の直交座標系 (q_1, q_2, q_3) での gradient $\boldsymbol{\nabla}\psi(q_1, q_2, q_3)$ を $h_i = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i}\right|$ および、$\boldsymbol{e}_i = h_i^{-1}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i}, (i = 1, 2, 3)$ を用いて表せ。
注) 直交座標系とは一般に $(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$を満たす座標系のことである。

2. 上と同様の直交座標系で divergence について考える。

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} d\boldsymbol{v}$$

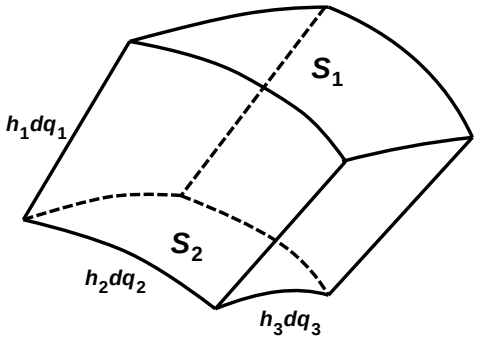
の関係は一般的に Gauss の定理として知られている。ここで、q-座標での成分を用いると、$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i A_i$ と表される。

(a) 微小面積要素 $d\boldsymbol{\sigma}$、および微小体積要素 $d\boldsymbol{v}$を $\boldsymbol{e}_i, h_i, dq_i$ を用いて表せ。

(b) ここで、図のような微小な体積要素を考える。このとき、

$$\int_{S_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

を求めよ。



(c) Gauss の定理を使って q-座標系での$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ を書き下だせ。

(d) 円柱座標での$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ を書き下だせ。

3. 前問と同様にして、Stokes の定理

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$$

を用いて vector の rotation を q-座標で書き下せ。

4. 円柱座標において、

(a) Laplacian $\Delta = \sum \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i} \right)^2$ を書き下だせ。(ヒント :$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$)

(b) 方程式

$$\left(\Delta + k^2\right) \Phi = 0$$

を円柱座標系で変数分離せよ。

5. 球座標 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos(z/r), \varphi = \arctan(y/x)$ において、

(a) Laplacian を書き下せ。

(b) 方程式

$$\left(\Delta + k^2\right) \Phi = 0$$

を球座標系で変数分離せよ。