物理数学 2 演習第 10 回

1. Legendre 関数が満たす以下の関係を示せ。

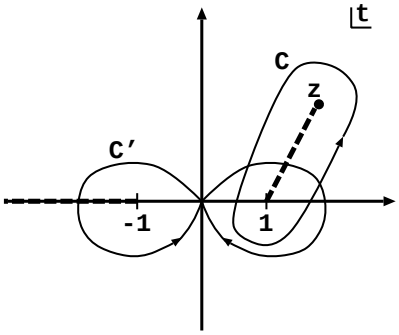
(a)
$$(x^2-1)P_n^{''}(x)+2xP_n^{'}(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

(b)
$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

(c)
$$\int_{-1}^{1}dx\,P_n(x)P_m(x)=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{1}$$

(d)
$$P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x)=P_n(x)$$

2. (a) Lgendre 関数の積分表示
$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C dt\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}$$
が、Legendre の微分方程式を満たす事を直接代入する事によって示せ。(積分路 Cおよび t-平面上の切断線を右の図に示す。)

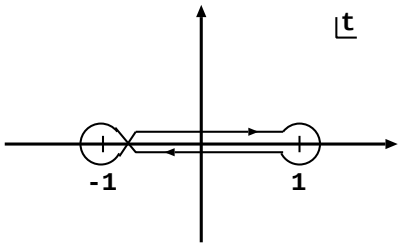


(b) 同様にして
$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\nu\pi}\int_{C'}dt\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}\qquad\text{(第 2 種 Legendre 関数)} \tag{2}$$
が、Legendre の微分方程式を満足する事を示せ。(ただし積分路 C'は上の図。)

3. (a) (2) 式の積分路 C'を右の図のように変形すると被積分関数は、

実軸の上側に沿って -1 から 1 までは、 $e^{i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}$

実軸の下側に沿って 1 から -1 までは、 $e^{-i\nu\pi}\dfrac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}$



である。これを用いて、
$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dt\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}} \tag{3}$$
を示せ。ただし $\mathrm{Re}(\nu+1)>0,\ z\notin[-1,1]$ とする。

(b) (3) 式を用いて $|z|\to\infty$ での $Q_\nu(z)$ の振舞を調べよ。