物理数学 2 演習第 11 回

1. Legendre の陪関数を次の式で定義する。

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \tag{1}$$

(a) Legendre の微分方程式 $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ を m 回微分することに依って次の方程式を導け。

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n(x)}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}} + \{n(n+1) - m(m+1)\}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} = 0 \tag{2}$$

(b) Eq. (1) を用いて次の式を導け。

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^m(x) - 2x\frac{d}{dx}P_n^m(x) = \ & (1-x^2)^{m/2+1}\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_n(x) \\ & -2(m+1)x(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x) \\ & +m^2x^2(1-x^2)^{m/2-1}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) - m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\end{aligned}$$

(c) 陪関数の満たす方程式が次のように与えられることを示せ。

$$\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]\}P_n^m(x) = 0$$

2. Legendre 陪関数の直交関係を調べよう。

$$f(m)\delta_{n,\ell} = \int_{-1}^{1} dx P_\ell^m(x)P_n^m(x)$$

とおく。

(a) Eq. (1) の定義式を用いて次の式を導け。

$$f(m) = -\int_{-1}^{1} dx \frac{d^{m-1}P_\ell(x)}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\{(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\} \tag{3}$$

(b) Eq. (2) から次の関係式を導け。

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\} = \{m(m-1) - n(n+1)\}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}} \tag{4}$$

(c) Eq. (3)、(4) の結果より漸化式 $f(m) = \{n(n+1) - m(m-1)\}f(m-1)$ を導け。

(d) 得られた漸化式を解いて次の結果を得よ。

$$f(m) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}f(0)$$

(e) 以上の分析から次の直交関係を結論せよ。

$$\int_{-1}^{1} dx P_n^m(x)P_\ell^m(x) = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{n,\ell}$$

3. rのみに依存する任意のポテンシャル $V(r)$ に対して、

$$[\Delta - V(r)]u(r,\theta,\phi) = 0$$

は、$u(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と変数分離すると、

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)\right]R(r) = 0, \tag{5}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta} + \left\{\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\right]\Theta(\theta) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2\Phi(\phi), \tag{7}$$

となる。(7) より、

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

で、m は整数となり、(6) より、

$$\Theta(\theta) = P_\ell{}^m(\cos\theta)$$

であり$\Theta(\theta)$ が regular でかつ 0 でないことから、ℓが $\ell \geq |m|$ の整数であることが結論される。したがって、角度 (θ,ϕ) に依存する部分は、$V(r)$ によらず、

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = (-1)^m\left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}\right]^{1/2}P_\ell{}^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}, \quad \text{(球面 (調和) 関数)}$$

となる。

(a)

$$\int\int \sin\theta\ d\theta d\phi\ \overline{Y_{\ell m}}(\theta,\phi)\ Y_{\ell' m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

及び、

$$\overline{Y_{\ell m}}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{\ell -m}(\theta,\phi)$$

を示せ。

(b) 連続な任意関数 $f(\theta,\phi)$ は、$Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ を用いて展開することが可能である。(完備性)

$$f(\theta,\phi) = \sum_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell,m}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

このことを用いて、

$$\sum_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta,\phi)\overline{Y_{\ell m}}(\theta',\phi') = \frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

を示せ。