1996 年度 物理数学第 2 演習 第 2 回

1. 2 階微分方程式、

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1}$$

において、係数 $P(x)$ および $Q(x)$ が $x = a$ で正則 (テーラー展開可能) ならば、$x = a$ を微分方程式の正則点という。正則点の近傍では、解は正則である。

例えば、

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 2)y = 0, \tag{2}$$

の $x = 0$ まわりの解を、

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{3}$$

とおいて与式に代入し各べきの係数を 0 とおくことにより $O(x^7)$ まで求めよ。

2. (1) の 2 階微分方程式の係数 $P(x)$ または $Q(x)$ が $x = a$ において正則でないが、

$$\lim_{x\to a}(x-a)P(x), \quad \lim_{x\to a}(x-a)^2 Q(x), \tag{4}$$

は有限確定であるとき、微分方程式 (1) は $x = a$ で確定特異点をもつという。以下、フロベニウス (**Frobenius**) の方法と呼ばれる方法にしたがって、確定特異点のまわりの解について調べる。

まず、(1) を

$$L[y] \equiv (x-a)^2 y'' + (x-a)p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{5}$$

のように書き直しておこう。ただし、

$$p(x) = p_0 + p_1(x-a) + p_2(x-a)^2 + \cdots, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x-a) + q_2(x-a)^2 + \cdots, \tag{7}$$

である。

(a) 解を

$$\begin{aligned} y &= a_0(x-a)^\lambda + a_1(x-a)^{\lambda-1} + \cdots && (8)\\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (x-a)^{\lambda+\ell}, && (9)\\ &\quad \text{ただし } a_0 \neq 0, && (10) \end{aligned}$$

と置き、λを決定する方程式 (決定方程式) および a_kの漸化式が、それぞれ次のようになることを示せ。

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0 = 0, \tag{11}$$

$$(\lambda+k)(\lambda+k-1)a_k + \sum_{\ell=0}^{k} \{(\lambda+k-\ell)p_\ell + q_\ell\}\, a_{k-\ell} = 0. \tag{12}$$

(b) Eq. (11) の解をλ_1, λ_2とする。このとき、$\lambda_1 - \lambda_2 \neq$ 整数ならば問題なく eq. (12) から 2 つの独立な解が求まることが知られている。一方、$\lambda_1 = \lambda_2$、または$\lambda_1 - \lambda_2 = n(= 1,2,3,\cdots)$ のときは 1 つしか解が求まらない。

$\lambda_1 - \lambda_2 = n(= 1,2,3,\cdots)$ のときにλ_2に対する解が eq. (12) からは求まらないことを示せ。

以下では$\lambda_1 = \lambda_2$、$\lambda_1 - \lambda_2 = n$ のときの第 2 の解を求める。λを未定の定数として, a_ℓをλの (eq. (12) から決まる) 関数 $a_\ell(\lambda)$ と思って、

$$y(x,\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell(\lambda)(x-a)^{\lambda+\ell}, \tag{13}$$

と書くと、

$$L[y(x,\lambda)] = \{\lambda(\lambda-1) + \lambda p_0 + q_0\} a_0 (x-a)^{\lambda}, \tag{14}$$

となる。(中カッコの内が決定方程式になっていることに注意。)

(c) $\lambda_1 = \lambda_2$のとき、

$$L[y(x,\lambda_1)] = 0, \quad L\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda} y(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_1}\right] = 0, \tag{15}$$

つまり、第 1 の解および第 2 の解が

$$y_1 = y(x,\lambda_1) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell(\lambda_1)(x-a)^{\lambda_1+\ell}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} y(x,\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_1} && (17)\\ &= y_1 \log(x-a) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{\partial a_\ell(\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_1} (x-a)^{\lambda_1+\ell}, && (18) \end{aligned}$$

となることを示せ。

(d) $\lambda_1 - \lambda_2 = n (= 1, 2, 3, \cdots)$ のとき、

$$L\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-\lambda_2) y(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_2}\right] = 0, \tag{19}$$

つまり、第 2 の解が

$$\begin{aligned} y_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-\lambda_2) y(x,\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_2}, && (20)\\ &= \log(x-a) \cdot \sum_{\ell=n}^{\infty} \{(\lambda-\lambda_2) a_\ell(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_2} (x-a)^{\lambda_2+\ell} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{\frac{\partial(\lambda-\lambda_2) a_\ell(\lambda)}{\partial\lambda}\right\}_{\lambda=\lambda_2} (x-a)^{\lambda_2+\ell}, && (21) \end{aligned}$$

となることを示せ。(第 1 の解は、もちろん $y_1 = y(x,\lambda_1)$ である。)

(e) $\{(\lambda-\lambda_2) a_{n+r}(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_2}$が $a_r(\lambda_1)$ と同じ漸化式を満たすことを示し、eq. (21) の第 1 項が

$$\log(x-a) \cdot \frac{\{(\lambda-\lambda_2) a_n\}_{\lambda=\lambda_2}}{a_0} y_1, \tag{22}$$

と書けることを示せ。

3. ベッセル (Bessel) の微分方程式

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0 \tag{23}$$

について、

(a) 前問のフロベニウスの方法に従って、ベッセルの微分方程式の $x = 0$ まわりでの第 1 の解を求めよ。さらに、νが整数または半整数でない場合に、ベッセルの微分方程式の $x = 0$ まわりでの第 2 の解を求めよ。

(b) 同様に、νが半整数の場合に、ベッセルの微分方程式の $x = 0$ まわりでの第 2 の解を求めよ。