1996 年度 物理数学第 2 演習 第 3 回

1. 次の微分方程式を超幾何微分方程式と呼ぶ。

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \tag{1}$$

(a) Eq. (1) の特異点を調べよ。

(b) Eq. (1) の $x=0$ 付近の解を求めるために $y = x^\lambda\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n\}$ と置く。

i. $\lambda = 0, 1-\gamma$であることを示せ。

ii. $\lambda = 0$ の時の A_1 と A_2を具体的に求めてみよ。

iii. $\lambda = 1-\gamma$の時の A_1 と A_2を具体的に求めてみよ。

iv. $\lambda = 0$ の時、A_nに対する漸化式が

$$A_n = \frac{-1}{n(n-1+\gamma)}\sum_{k=0}^{n-1}\{(\gamma-\alpha-\beta-1)k - \alpha\beta\}A_k$$

となることを示せ。

v. この時、A_nが次のようになることを示せ。

$$A_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}$$

ただし、$(\alpha)_n \equiv (\alpha+n-1)!/(\alpha-1)! = \alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)$ である。

以下この$\lambda = 0$ の時の解を $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ と書くことにする。すなわち、

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}$$

ただし、$\gamma \neq 0, -1, -2, \cdots$。(これを超幾何関数と呼ぶ。)

(c) Eq. (1) の $x=0$ 付近の解で，$\lambda = 1-\gamma$のものを求めよう。

i. $y = x^{1-\gamma}\eta$と置いてηに対する微分方程式を導け。

ii. $y = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x)$ を示せ。

(d) Eq. (1) の $x=1$ 付近の解を求めよう。

i. $\xi = 1-x$ と置いて Eq.(1) を書き換えよ。

ii. $x=1$ 付近での解が

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-x),\ \text{および}\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1;1-x)$$

で与えられることを示せ。

(e) Eq. (1) の $x=\infty$ 付近の解を求めよう。

i. $x = 1/\xi$, $y = \xi^\alpha\eta$と置いて Eq. (1) を書き換えよ。

ii. $x=\infty$ 付近での解が

$$x^{-\alpha}F(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta; 1/x),\ \text{および}\ x^{-\beta}F(\beta, 1+\beta-\gamma, 1-\alpha+\beta; 1/x)$$

で与えられることを示せ。

2. 次の関係式を証明せよ。

(a)
$$\frac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

(b)
$$(\beta-\alpha)F(\alpha,\beta,\gamma;x)+\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)-\beta F(\alpha,\beta+1,\gamma;x)=0$$

(c)
$$(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma;x)+\alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)+(\beta-\gamma)F(\alpha,\beta-1,\gamma;x)=0$$

3. (a) 超幾何微分方程式 (1) において、x を$\frac{z}{\beta}$とし、$\beta\to\infty$ の極限をとることにより得られる方程式を導け。(これを合流型超幾何微分方程式と呼ぶ。)

(b) 超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ において、

$$F(\alpha,\gamma;z):=\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta,\gamma;\frac{z}{\beta}\right)$$

を考えることにより、合流型超幾何微分方程式の $z=0$ まわりでの級数解を求めよ。(これを合流型超幾何関数と呼ぶ。)

(c) (3b) で得た、合流型超幾何関数 $F(\alpha,\gamma;z)$ が合流型超幾何微分方程式の解であることを直接確かめよ。

(d) 同様にして、合流型超幾何微分方程式の $z=0$ まわりでの第 2 の解を求め、合流型超幾何関数を用いて表わせ。