## 1996 年度 物理数学第 2 演習 第 4 回

1. 次の関係式を示せ。

   (a)

   $$(1-z)^{\alpha} = F(-\alpha, \beta, \beta; z)$$

   (b)

   $$\log(1+z) = zF(1,1,2;-z)$$

   (c)

   $$\arcsin z = zF(1/2, 1/2, 3/2; z^2)$$

   (d)

   $$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)$$

2. 様々な微分方程式を超幾何微分方程式や合流型超幾何微分方程式に変換して解くことが出来る。

   (a) **チェビシェフ (Chebyshev) の微分方程式**

   $$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

   を幾何微分方程式に変換して解け。(ヒント :$x = 1-2t$ とせよ。)

   (b) **エルミート (Hermite) の微分方程式**

   $$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

   を合流型超幾何微分方程式に変換して解け。(ヒント :$x = t^{1/2}$とせよ。)

3. 超幾何関数の積分表示と解析接続

   超幾何関数には幾つかの積分表示が知られている。例えば、

   $$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha} dt, \tag{1}$$

   はオイラー (Euler) の積分表示と呼ばれるもので、$\Re\gamma > \Re\beta > 0$ で、$|\arg(1-z)| < \pi$ のときに成り立つ。ここで、ガンマ (gamma) 関数$\Gamma(p)$ は、

   $$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt, \quad (\Re p > 0),$$
   $$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$

   によって定義される。また、

   $$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)} (-z)^t dt, \tag{2}$$

   はバーンズ (Barnes) の積分表示と呼ばれるもので、$\alpha, \beta \neq$非負の整数で、$|\arg(-z)| < \pi$ のときに成り立つ。ここで、積分路は図 1 のように取るものとする。

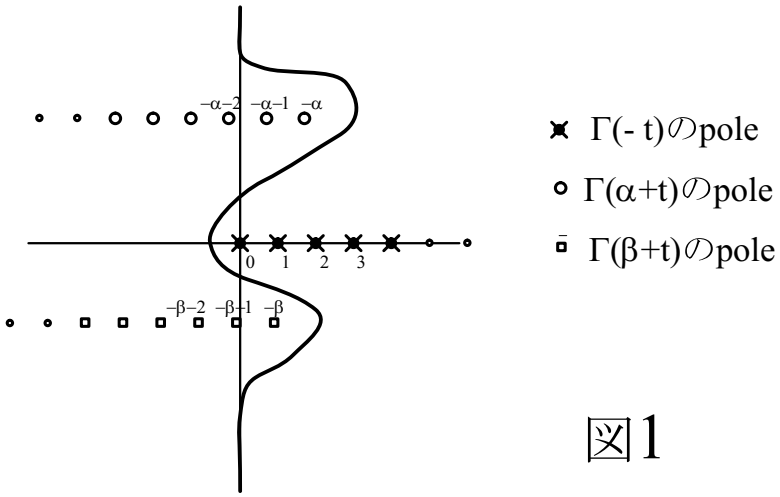


図1

(a) 関係式

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} =: B(p,q), \tag{3}$$

を示せ。($B(p,q)$ はベータ (beta) 関数と呼ばれる。)

ヒント)

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv = \int_0^\infty e^{-s}s^{p+q-1}ds \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

となることを、変数変換によって示せばよい。

(b) (1) のオイラーの積分表示が、超幾何微分方程式を満たすことを示せ。

ヒント)

$$\left[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)z\}\frac{d}{dz} - \alpha\beta\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}$$
$$= -\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[t^\beta(1-t)^{\gamma-\beta}(1-tz)^{-\alpha-1}\right],$$

となることを示し、それを用いよ。

(c) $z=0$ のまわりで (1) の右辺を展開し (3) を用いて、$z^0$ 及び、$z^1$ の係数を求めよ。

以上より、(1) の左辺は超幾何微分方程式を満たし、展開の最初の項があっていることから、超幾何関数であることがわかる。また、$z=0$ のまわりの展開係数を一般の $z^n$ の項について求めることによっても超幾何関数であることは確かめることができる。

次に、(2) のバーンズの積分表示について考察する。まず、準備として公式

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right]_{t=-n} = (-1)^n n!, (n=0,1,2,3,\cdots), \tag{4}$$

を以下に示す。

$$\frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}{\Gamma(1+z)} = \frac{1}{\Gamma(z-n)}$$

から、$\Gamma(z)$ は $z$ が 0 または負の整数のとき一位の pole を持つことがわかる。更に、上式の両辺を $z$ で微分し $z=0$ とおくと左辺は分子の先頭にある $z$ に微分がかかったもののみが残る。$\Gamma(1)=0!=1$ であることを思い出すと、(4) が得られる。

(d) (2) の左辺は、$|z|<1$ のとき、図 2 に示したように積分路を閉じることができる。($|t|\gg 1$ のとき$\Gamma(t)\to\sqrt{2\pi}e^{-t}t^t$ ということを使えば示せる) このとき、(2) の左辺が超幾何関数を与えることを示せ。また、$|z|>1$ のときは、図 3 に示したように積分路を閉じることができる。このことを用い、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;1/z)\\ &\quad+\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;1/z),\end{aligned}$$

を示せ。

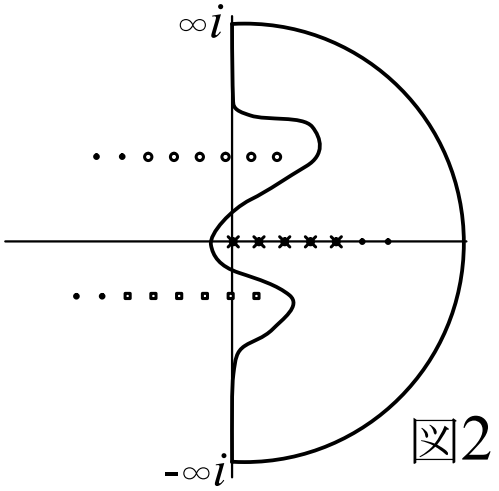

図2

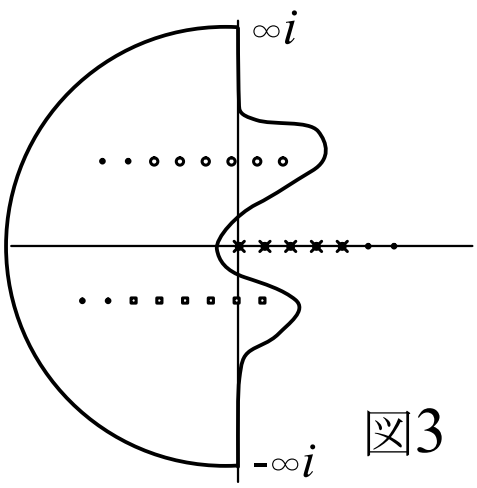

図3

ヒント )

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z}(-z)\Gamma(1-(z+1))\\ &= -\Gamma(z+1)\Gamma(1-(z+1))\\ &\vdots\\ &= (-1)^n\Gamma(z+n)\Gamma(1-(z+n))\end{aligned}$$

べき級数で定義された超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は、収束半径が $|z|<1$ である。これは、$z=1$ が特異点であることに対応しているが、$z=1$ 以外の点を通って $|z|>1$ の領域へ解析接続することが可能である。積分表示は上の公式からもわかるように、この解析接続を与え、異なる確定特異点まわりの級数解を結び付ける関係式を与える。