1996 年度 物理数学第 2 演習 第 5 回

1. ガンマ関数 (Γ-関数)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \Re z > 0, \tag{1}$$

を解析接続して得られる関数$\Gamma(z)$ をガンマ関数という。この関数は以下のようにもあらわすこともできる。

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+z/2)\cdots(1+z/n)} \\ &= \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[(1+1/n)^z (1+z/n)^{-1} \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

これは、ガウス (Gauss) によって用いられた定義である。(1) と (2) の等価性は以下のようにして示すことができる。まず、

$$\lim_{n\to\infty} (1-t/n)^n = e^{-t},$$

であることを思い出し、以下の積分

$$\int_0^n (1-t/n)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

が $\Re z > 0$ で成り立つことを確かめれば、両辺で $n \to \infty$ の極限をとることにより (1) と (2) の第 1 式が等価であることがわかる。

また、ワイルストラス (Weierstrass) によって用いられた定義は、

$$1/\Gamma(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[(1+z/n) e^{-z/n} \right]. \tag{3}$$

ここで、

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m \right) = 0.5772156649\cdots,$$

で、オイラー (Euler) の定数と呼ばれる。(2) と (3) との等価性は、(2) の第 2 式から

$$\begin{aligned} 1/\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} z(1+z)(1+z/2)\cdots(1+z/n) e^{-z\log n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[z(1+z) e^{-z} (1+z/2) e^{-z/2} \cdots (1+z/n) e^{-z/n} \right] e^{z(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)} \end{aligned}$$

,

のようにして示される。

(a) (1) の表式を用いて、部分積分により

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{4}$$

を示せ。この関係は関数関係式であるので $\Re z > 0$ に限らずに成り立つと考えてよい。これによって $z < 0$ の領域にも解析接続されると考えることもできる。

(b) (2) の第 1 の表式を用いて、(4) を示せ。

(c) (1) の表式を用いて、

$$\Gamma(1) = 1, \tag{5}$$

及び、

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

を示せ。

また、(4) と (5) により非負の整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることがわかる。

(d) (3) の表式を用いて、$|\epsilon| \ll 1$ に対して

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon), \tag{6}$$

を示せ。また、(4) を用いて、正の整数 n に対し

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\epsilon} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \gamma\right] + O(\epsilon), \tag{7}$$

を示せ。

ベータ関数 (β -関数)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \Re x > 0, \Re y > 0, \tag{8}$$

を解析接続して得られる関数をベータ関数と呼ぶ。

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

となることは以前示した。

(e)

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\ d\theta,$$

を示せ。

(f)

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \tag{9}$$

を示せ。

(g) (9) の表式を用い、右辺の被積分関数を図 1 のような経路に沿って積分することを考えることにより、

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z,1-z) = \pi/\sin\pi z \quad (10)$$

となることを $1 > \Re z > 0$ の場合に示せ。この関係式は、両辺とも一価解析関数であるので、zの全領域でいつでも成り立つ。

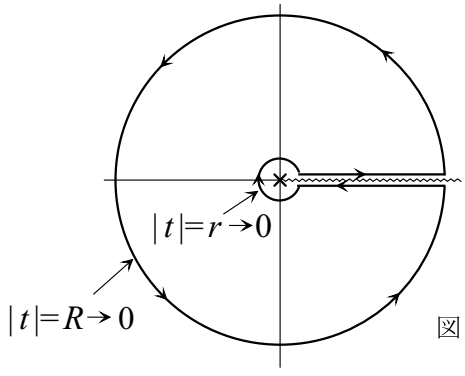

図 1

2. Γ関数の複素積分表示

式 (1) のΓ関数の積分表示は、積分の ($t = 0$ での) 収束性から$\Re z > 0$ という条件が付いていた。この制限を解除して zの他の領域への解析接続を行うために、式 (1) の積分変数をを複素数に拡張して、次のような複素積分を考える。

$$w(z) = \int_{\mathbf{C}} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta$$

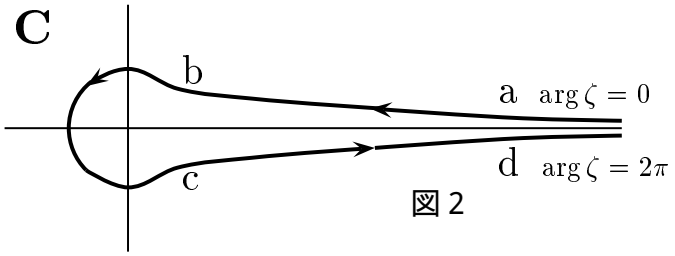

図 2

ただし、径路 $\mathbf{C}$ は図 2 に示すもので、実軸の正の方向の無限遠点から出発して、被積分関数の分岐点$\zeta = 0$ を正の向きに回って再び無限遠点に去る。ここで、図の a で $\arg\zeta = 0$、 d で $\arg\zeta = 2\pi$ と選ぶことにする。径路 $\mathbf{C}$ は特異点$\zeta = 0$ を通らないから積分は zの値に依らず収束する。

この積分と式 (1) のΓ(z) との関係を調べるために、$\Re z > 0$ という条件のもとで径路 $\mathbf{C}$ を図 3 のように変形してみる。

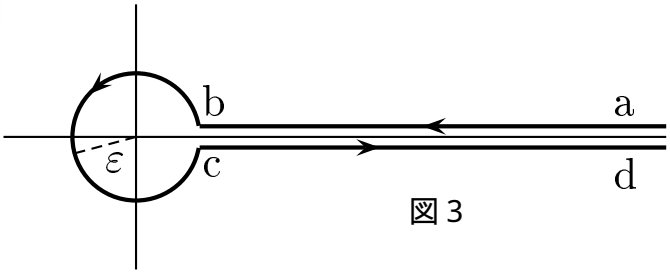

図 3

(a) 原点のまわりの小円での積分は半径$\varepsilon \to 0$ の極限で 0 に収束することを示せ。

(b) 式 (1) で定義されたΓ(z) が

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i\sin\pi z}\int_{\boldsymbol{C}} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta \quad \text{ただし}\Re z > 0$$

と書けることを示せ。

上の式の右辺の積分ははは$\Re z > 0$ 以外の zでも収束する。すなわち、式 (1) のΓ(z) の解析接続として、$\Re z > 0$ の制限を受けないΓ(z) が定義できた。このΓ(z) と問 1 の解析接続とはもちろん同じものを表している。(一致の定理)

3. Γ関数の漸近展開

$z \to \infty$ でのΓ(z) のふるまいについて調べる。(zは実数とする。)

(a) 式 (1) で $t = z\tau$とおき、

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1}e^{-z}\int_0^\infty e^{-zf(\tau)}d\tau$$

と書き直し、$f(\tau)$ を求めよ。

(b) $f(\tau)$ の極小値近傍で上の積分を評価し、スターリング (Stirling) の公式

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2}e^{-z}$$

を示せ。