1996 年度 物理数学 2 演習 第 6 回

1. (a) Strum-Liouvile 型の微分方程式

$$\left[\frac{d}{dx}(x-a)(b-x)w(x)\frac{d}{dx}+n\{n+\alpha+\beta+1\}w(x)\right]P_n(x)=0,$$

の解が、

$$P_n(x)=\frac{C_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)(x-a)^n(b-x)^n),\quad (\text{Rodrigues の公式}) \tag{1}$$

となることを示せ。ただし、$w(x)=(x-a)^\alpha(b-x)^\beta\ \ (\alpha,\beta>-1)$、$C_n$ は適当な規格化定数である。

(b) P_n が n 次の多項式になることに着目し、$n\neq m$ のとき

$$\int_a^b dx\ w(x)P_n(x)P_m(x)=0, \tag{2}$$

となることを示せ。

(c) Legendre の微分方程式、

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{3}$$

の解は、$C_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}$ として Rodrigues の公式 (1) を用いて表すと、

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \tag{4}$$

となる。
このことを用いて、$P_1(x),P_2(x),P_3(x)$ を、具体的に求めよ。

(d)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n/2}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{5}$$

となることを Rodrigues の公式 (4) より導け。

2. (a) Rodrigues の公式 (4) から、Legendre 多項式の積分表示

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\zeta\ (\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-x)^{n+1}} \tag{6}$$

を導け。ただし C は、x を囲んで正の向きに一周する閉曲線。

(b) (6) の積分表示を用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}},\quad (\text{母関数}) \tag{7}$$

を示せ。

3. **Laguerre の多項式**

(a) 定義、直交性、規格化 ：

$$L_n^k(x) \equiv \frac{1}{n!\,w(x)} \frac{d^n}{dx^n} w(x) x^n, \quad w(x) = x^k e^{-x} \ \ (k \geq 0) \tag{8}$$

とすると、$L_n^k(x)$ は x の n 次の多項式であることを示し、

$$\int_0^\infty w(x) L_n^k(x) L_m^k(x) dx \tag{9}$$

を求めよ。

(b) 母関数 ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) z^n = (1-z)^{-k-1} \exp\left(-\frac{z}{1-z} x\right) \tag{10}$$

を示せ。

(c) **Laguerre の陪微分方程式** ：
母関数を用いて、

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (k+1-x) \frac{d}{dx} + n \right] L_n^k(x) = 0 \tag{11}$$

を示せ。

4. **Hermite の多項式**

(a) 定義、直交性、規格化 ：

$$H_n(x) \equiv (-1)^n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} w(x), \quad w(x) = e^{-x^2} \tag{12}$$

とすると、$H_n(x)$ は x の n 次の多項式であることを示し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) H_n(x) H_m(x) dx \tag{13}$$

を求めよ。

(b) 母関数 ：

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp(2xz - z^2) \tag{14}$$

を示せ。

(c) **Hermite の微分方程式** ：
母関数を用いて、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right] H_n(x) = 0 \tag{15}$$

を示せ。