物理数学 2 演習 第 7 回

1. ベッセル関数$J_n(z)$ を次の母関数を用いて定義しよう。

$$\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \tag{1}$$

(a) (1) を用いて $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z),\ J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$ を示せ。

(b) 上で定義されたベッセル関数 $J_n(z)$ がベッセルの微分方程式

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0 \tag{2}$$

を満たすことを示せ。
ヒント ：

$$\{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z} + 1 - \frac{t}{z^2}\frac{\partial}{\partial t}t\frac{\partial}{\partial t}\}\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\} = 0 \tag{3}$$

(c) ベッセル関数の加法定理

$$J_n(x+y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(x)J_{n-s}(y) \tag{4}$$

を導け。

(d) (1) において $t = e^{i\theta}$ と置きフーリエ成分をもとめることによって次の表式を得よ。

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \exp(iz\sin\theta - in\theta) \tag{5}$$

(e) 次の漸化式を導け。

$$J_n'(z) + \frac{n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) \tag{6}$$

$$J_n'(z) - \frac{n}{z}J_n(z) = -J_{n+1}(z) \tag{7}$$

ヒント ：

$$\{\frac{d}{dz} + \frac{t}{z}\frac{d}{dt} - t\}\exp\{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})\} = 0 \tag{8}$$

2. 次の関係式を導け。

(a)

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos(z\sin\theta - n\theta) \tag{9}$$

(b)

$$\int_0^{\infty} dx e^{-ax}J_0(bx) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{a^2 + b^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{10}$$

但し $a > 0,\ b > 0$ とせよ。ヒント :(9) で $n = 0$ とおけ。又，θ の積分は $z = e^{i\theta}$ と置いてコーシーの積分定理を用いよ。

3. (a) 母関数を利用して次の等式を証明せよ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda t)^n J_n(z) = \exp\{\frac{z}{2t}(\lambda - \frac{1}{\lambda})\}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(\lambda z) \tag{11}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}t^n J_n(z) = e^{\frac{i}{t}z\sin\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(e^{i\theta}z) \tag{12}$$

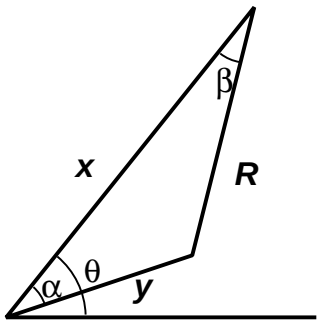
(b) ベッセル関数の加法定理を用いて次の関係式を示せ。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} t^n J_n(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} t^m J_m(y) = e^{\frac{1}{t}(x\sin\theta + y\sin\phi)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(e^{i\theta}x + e^{i\phi}y) \tag{13}$$

4. 下図のような三角形を考えると

$$R\cos(\theta+\beta) = x\cos\theta - y\cos(\theta-\alpha) \tag{14}$$

であることがわかる。このことを示し、前問の結果を用い Gegenbauer の加法定理

$$J_0(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)J_n(y)\cos n\alpha \tag{15}$$

を示せ。