物理数学 2 演習第 8 回 (http://kabuto.phys.wani.osaka-u.ac.jp/tanaka/appmath.html)

1. (a) 次の関係式

$$\frac{d}{dz}\left[z(J_m(\beta z)\frac{dJ_n(\alpha z)}{dz} - J_n(\alpha z)\frac{dJ_m(\beta z)}{dz})\right] = zJ_n(\alpha z)J_m(\beta z)\left[-(\alpha^2-\beta^2) - \frac{m^2-n^2}{z^2}\right],$$

及び、

$$(\alpha^2-\beta^2)\int_0^x dz z J_n(\alpha z)J_n(\beta z) = x\left[\beta J_n(\alpha x)J_n'(\beta x) - \alpha J_n(\beta x)J_n'(\alpha x)\right],$$

を示せ．

(b) ベッセル関数の漸化式を用いて次の等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&(\alpha^2-\beta^2)\int_0^x dz z J_n(\alpha z)J_n(\beta z)\\ &= x\left[\alpha J_n(\beta x)J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J_{n+1}(\beta x)\right]\\ &= x\left[\beta J_n(\alpha x)J_{n-1}(\beta x) - \alpha J_n(\beta x)J_{n-1}(\alpha x)\right].\end{aligned}$$

(c) 上で証明した式で$\beta = \alpha + \epsilon$とし，$\epsilon \to 0$ とすることによって次の式を示せ．

$$\int_0^x dz z[J_n(\alpha z)]^2 = \frac{x^2}{2}\left([J_n'(\alpha x)]^2 + (1-\frac{n^2}{\alpha^2 x^2})[J_n(\alpha x)]^2\right).$$

(d) $J_n(x) = 0$ の正根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_s \cdots\cdots$と置く．$\psi_s(x) := \sqrt{2x}J_n(\lambda_s x)/J_{n+1}(\lambda_s)$ $(s = 1, 2, \cdots)$ が区間 $[0,1]$ において正規直交系をなす、すなわち、

$$\int_0^1 dx\ \psi_s(x)\psi_{s'}(x) = \delta_{s,s'}, \tag{1}$$

となることを示せ．

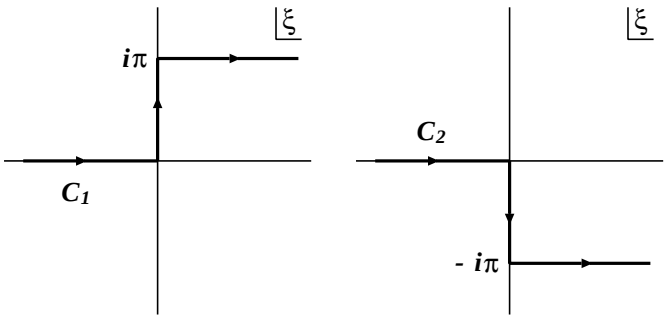
(e) $0 < r < 1$, $-\pi < \theta < \pi$ において定義されている関数 $f(r,\theta)$ を

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\Big(A_{n,s}\cos n\theta + B_{n,s}\sin n\theta\Big)J_n(\lambda_{n,s}r),$$

と展開したとする．($\lambda_{n,s}$ は $J_n(x)$ の s 番目の正根.) $A_{n,s}, B_{n,s}$ を求める表式を書け．

2. 次の積分式で $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ $(\Re z > 0)$ を定義しよう．

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{i\pi}\int_{C_1} d\xi \exp(z\sinh\xi - \nu\xi),\\ H_\nu^{(2)}(z) &= -\frac{1}{i\pi}\int_{C_2} d\xi \exp(z\sinh\xi - \nu\xi).\end{aligned} \tag{2}$$



(a) $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ がベッセルの微分方程式を満たす事を示せ．($\Re z > 0$ に注意せよ.)

(b) $t = e^\xi$ という関係式によって積分変数をξから t に変えたとしよう．C_1, C_2という積分路はt-平面ではどのようになるか図示せよ．

(c) 2bの変数変換を用いて、

$$\frac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dt \exp\{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})\}t^{-\nu-1}, \tag{3}$$

となることを示せ．また、このとき、積分路 Cがどのようになるか図示せよ．また、$\nu = n$ (n は整数) のとき、積分路 Cは原点を囲み一周する円になることを説明せよ。

(d) 前問の結果を用い、$\frac{1}{2}\{H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)\}$ は $J_n(z)$ にほかならないことを結論せよ．(ヒント ：ベッセル関数の母関数を用いよ .)

(3) 式の右辺は一般のνに対するベッセル関数を与えている。

(e) (2) 式において積分変数をξから $\xi' = -\xi + i\pi$ におきかえることにより $H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)$ を導け．同様にして $H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)$ を導け．

(f) 上の結果を用いて、

$$N_\nu(z) := \frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\} = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}, \tag{4}$$

を示せ．

$N_\nu(z)$ はノイマン (Neumann) 関数と呼ばれ、ベッセルの微分方程式の第二の解を与えている。このことから$\nu = n$ のばあいにも極限をとることにより

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, \tag{5}$$

のようにして第二の解が得られる。