電磁気学 2 演習

1. 以前の演習問題 (No.9 の 1.) と同様に、$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\epsilon\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)=\mu^{-1}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)=\sigma\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ と近似できる導体中の電磁場を考える。$\epsilon,\ \mu,\ \sigma$ は定数である。

   (a) 銅などの良導体に対しては室温で $\sigma\ \sim\ 10^{8}/\Omega\mathrm{m},\ \epsilon\ \sim\ 10^{-10}\mathrm{A}^2\mathrm{sec}^2/\mathrm{Jm}$ である。$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ と書いたとき、$\omega\ll 10^{18}\mathrm{Hz}$ であれば、$|\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}|=\dfrac{\epsilon\omega}{\sigma}|\,\boldsymbol{i}\,|\ll|\,\boldsymbol{i}\,|$ であり、導体中では変位電流を無視してもかまわないことを確かめよ。$10^{18}\mathrm{Hz}$ というのはどの程度の振動数か？例えば、可視光の振動数よりも高いか、それとも低いか？また、ここでは導体を考えているわけだから $\omega\ll\omega_p$ であることを前提にしている。典型的な金属 (電子数密度 $\sim 10^{22}/\mathrm{cm}^3$) のプラズマ振動数 ω_p はどの程度の大きさか？ω_p の定義は No.10 の 2. を見よ。

   (b) 変位電流を無視できる程度にゆるやかに時間変動する電流を準定常電流と呼ぶ。準定常電流の流れる導体中での電磁場を決める方程式が $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial\,t}$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\sigma\mu\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t),\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0$ であることを確かめよ。

   (c) これらより $\triangle\,\boldsymbol{E}=\sigma\mu\dfrac{\partial\,\boldsymbol{E}}{\partial\,t},\ \triangle\,\boldsymbol{B}=\sigma\mu\dfrac{\partial\,\boldsymbol{B}}{\partial\,t},\ \triangle\,\boldsymbol{i}=\sigma\mu\dfrac{\partial\,\boldsymbol{i}}{\partial\,t}$ であることを確かめよ。(ヒント: $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=0$ である)

   (d) 導体でできた無限に長い円柱を流れる準定常電流の空間分布を求めよう。円柱の軸を z 軸に選び、円筒座標 r,φ,z を用いることにする。電流密度を $\boldsymbol{i}=\mathrm{Re}\ i(r)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\boldsymbol{e}_z$ と書いたとき、$i(r)$ を決める方程式が $i''(\xi)+\dfrac{1}{\xi}i'(\xi)+i(\xi)=0$ であることを示せ。$\xi\equiv kr$ で、$k^2\equiv i\sigma\mu\omega$ である。

   (e) この微分方程式の一般解は $i(r)=c_1J_0(kr)+c_2N_0(kr)$ である。$r=0,\ a$ に対する境界条件から定数 $c_1,\ c_2$ を決めることにより、$i(r)=\dfrac{kI}{2\pi a}\dfrac{J_0(kr)}{J_1(ka)}$ であることを示せ。a は円柱の半径で、$I\equiv\displaystyle\int_0^a i(r)\,2\pi r\,dr$ である。($J_0'(\xi)=-J_1(\xi)$ を使うとよい)

   (f) $|ka|\gg 1$ (つまり $\omega\gg\dfrac{1}{\sigma\mu a^2}$) であれば、$r\approx a$ での $J_0(kr)$ に対して漸近公式 $J_0(x\sqrt{2i})\approx\mathrm{e}^{(1-i)x}\ \ (x\ \gg\ 1)$ を用いることができる。電流は円柱の表面付近で $\delta\ \equiv\ \sqrt{\dfrac{2}{\sigma\mu\omega}}$ 程度の厚さの部分にだけ存在することを示せ。($|i(r)|\ \propto\ \mathrm{e}^{-(a-r)/\delta}$ を示せばよい) また、$\mu\ \sim\ 10^{-6}\mathrm{N/A}^2,\ a\ \sim\ 1\mathrm{mm}$ として、$\dfrac{1}{\sigma\mu a^2}$ がどの程度の大きさであるかを見積もってみよ。

   (g) 逆に、$|ka|\ll 1$ のとき $i(r)\approx\dfrac{I}{\pi a^2}$ であることを示し、各時刻で '定常電流'、'静磁場'、'定常電場' を決める問題になることを確かめよ。(例えば、$i(r)$ が ω に依らなくなって、時間依存性が $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ の因子だけになることを確認すればよい)

2. 導体でできた無限に長い同軸円筒を考える。半径を $a,\ b\ (a<b)$ とし、軸を z 軸に取ることにしよう。

   (a) 静電容量と自己インダクタンスを求めよ。これらはいずれも円筒の長さに比例するはずであるから、単位長さあたりの値を求めることにせよ。

   (b) $z=-\infty$ にある電源により供給された電力がこの同軸円筒により運ばれて、$z=\infty$ にある負荷抵抗で消費される場合を考えよう。内側の円筒を z 軸の正の向きに流れる電流を I とし、外側の円筒に対する内側の円筒の電位を ϕ とする。$\displaystyle\iint\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{e}_z\,dx\,dy$ を計算することにより、$I\phi$ だけの電力が z 軸の正の向きに運ばれることを示せ。