電磁気学 2 演習

1. No.10 の問題 3 の続き。

   (a) 電流 $\boldsymbol{i}$ を求めよ。

   (b) $\nabla \times \boldsymbol{H} = \partial \boldsymbol{D}/\partial t + \boldsymbol{i}$ を微視的および巨視的に評価し屈折率を求めよ。また、$\lim_{\omega\to\infty} n(\omega) = 1$ であることを確かめよ。

2. 電磁波による信号の伝わる速さは波束の先端の速さ (先端速度) を越えることはないはずである。以下ではこの先端速度について考察しよう。分散性媒質内を z 軸方向に進む 1 次元の波 $A(z,t)$ を考える。

   (a) $t = 0$ で $z = 0$ に波束の先端が到着するとすれば、(ある特定の Fourier 成分だけを考えれば十分だから)

   $$A(0,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a \sin \omega_0 t & t > 0 \end{cases}$$

   と書ける。これは

   $$A(0,t) = -\frac{a\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2}\, d\omega \tag{1}$$

   と等しいことを示せ。ただし、積分路は複素平面上で極を上に避けるものとする。

   (b) 位相速度は $v(\omega) = c/n(\omega)$ で表されるから、$z > 0$ での波は式 (1) で $t \to t - z/v(\omega) = t - n(\omega)z/c$ とすれば求まる。$n(\omega \to \infty) = 1$ に注意して、$z > ct$ で $A(z,t) = 0$ となることを示せ。

   (c) $z < ct$ では一般に $A(z,t) \neq 0$ となることを示せ。上の結果と合せて、これで先端速度が c であることが分った。

3. $z = 0$ を境界面として異なる誘電体、誘電体 1 と誘電体 2、が接していて、この境界面に平面波 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{E}/i\omega(k))e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega(k)t)}$ が入射している。反射波は $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{E}'/i\omega'(k'))e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x} - \omega'(k')t)}$、屈折波は $\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},t) = (\boldsymbol{E}''/i\omega''(k''))e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x} - \omega''(k'')t)}$ と書ける。

   (a) 対応する電場および磁場を求めよ。

   (b) これらの電磁場は $z = 0$ で何らかの境界条件に従い、この境界条件はすべての時刻で境界面上のあらゆる点で満されなければならない。また、境界条件は電磁場について線形である。このことから、$\omega(k) = \omega'(k') = \omega''(k'')$ であること、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}'$、$\boldsymbol{k}''$ が同一平面 (入射面) 上にあること、入射角と反射角が等しいこと、およびスネルの法則 $\sin\varphi/\sin\chi = n_2(\omega)/n_1(\omega)$ を示せ。(φ は入射角、χ は屈折角で、$n_i(\omega)$ は誘電体 i の屈折率を表わす。)

   (c) 境界面を囲む薄い円柱の中での $\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) = 0$ を積分を考えて、$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)$ の (境界面についての) 法線成分が境界で連続であることを示せ。$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ についても同様である。

   (d) 境界面を囲む微小な長方形での $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ の積分を考えて、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ の接線成分が連続であることを示せ。$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)$ についても同様である。

   (e) 直線偏りを持つ電磁波を考えて、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{E}''$ を入射面に垂直な成分と平行な成分に分け、$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{E}''$ の各成分の大きさを $\boldsymbol{E}$ の各成分の大きさと入射角、屈折角で表せ。ただし、簡単のため $\mu_1 = \mu_2$ とする。