電磁気学 2 演習

1. 定常電流$\boldsymbol{i}$が作る静磁場を決める方程式は物質 (磁性体) があっても

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

と書ける。ただし、$\mu_0\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ であり、$\boldsymbol{M}$は (通常は$\boldsymbol{i}$によって誘起される) 磁性体中の磁化 (定義は前回の演習問題を見よ) で、物質のないところでは 0 である。

(a) 前回やったように、磁化$\boldsymbol{M}$が存在することは磁化電流$\boldsymbol{i}_m \equiv \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}$が存在することと等価である。物質の存在はこの$\boldsymbol{i}_m$で完全に代表されていて、全電流$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_m$が真空中にあったときにこれの作る磁束密度が上式の$\boldsymbol{B}$に等しいと考えることにより、上の静磁場を決める方程式を導け。

(b) 通常、$\boldsymbol{M}$は電流$\boldsymbol{i}$の作る外部磁場に対する応答として生じるが、永久磁石のように外部磁場がなくとも磁化を保っているものもある。このような永久磁化$\boldsymbol{M}_0$だけがあるとき、これが作る静磁場を決める方程式が、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0$ と $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}_0$ であることを示せ。

(c) この場合には、$\boldsymbol{H} = -\,\mathrm{grad}\,\phi$であるような磁位$\phi(\boldsymbol{x})$ を考えることができる。ϕを決める方程式が $\triangle\phi = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}_0$であることを示せ。

(d) $\boldsymbol{M}_0$が有限の領域内だけにあるとすると、この方程式の解は

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\,\mathrm{div}\int \frac{\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\,dV'$$

であることを示せ。

(e) 原点を中心とする半径aの一様に磁化した球の作る磁位$\phi(\boldsymbol{x})$が球の外で$\dfrac{M_0 a^3}{3\mu_0}\dfrac{z}{|\,\boldsymbol{x}\,|^3}$、球の中で$\dfrac{M_0}{3\mu_0}z$ であることを示せ。球内の磁化を $M_0\boldsymbol{e}_z$とする。

(f) 球の内部での$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{H}$を求めよ。

2. 電磁場が時間に依存して変化する場合、静電場に対する法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = 0$ は$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\dfrac{\partial\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial\,t}$と変更される。これは電流が磁場を作れるのと同様に、$-\partial\,\boldsymbol{B}\,/\,\partial\,t$が電場を作れることをあらわしている。仮想的に '磁荷の流れ' を考えれば、$-\partial\,\boldsymbol{B}\,/\,\partial\,t$ はそれに等価な量と見なすことができる。($\partial\,\boldsymbol{D}\,/\,\partial\,t$ が電流と等価な量であったことを思い出し (演習問題 No.3 の 3.)、それらの対応関係を考えてみよ。)

(a) $\partial\,\boldsymbol{B}\,/\,\partial\,t \neq 0$ を囲む小さな閉じた導線C には、起電力$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} \neq 0$ が生じることを示せ。

(b) 静磁場に対する $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = 0$ は '磁荷密度' が存在しないことをあらわしている。単独の磁荷を持った粒子がみつからないという経験事実から、時間変動する磁場に対しても $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0$ のはずである。従って、静磁場に対する以前の演習 (No.2 の 1.) と全く同様にして、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ であるベクトルポテンシャルを定義することができる。他方、(a) で見たように、$\partial\,\boldsymbol{B}\,/\,\partial\,t \neq 0$ のときには$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi$であるようなポテンシャル$\phi$は定義できない。しかし、この場合でも、$\mathrm{rot}(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\,\boldsymbol{A}}{\partial\,t}) = 0$ であることに注意すれば、スカラーのポテンシャルを新たに定義することができる。どの様に定義すればよいか？

(c) 静磁場の場合 (No.2 の 1.) と同様に、ゲージ変換$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) + \mathrm{grad}\,\Lambda(\boldsymbol{x},t)$ によって$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ は不変である。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ も不変になるようにするには (b) で定義したポテンシャルはどのように変換しなければならないか？