電磁気学 2 演習

1. $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\epsilon\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)=\mu^{-1}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t)=\sigma\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ と近似できる導体中の電磁場を考える。ϵ,μ,σは定数である。
   (a) 導体中に電荷分布$\rho(\boldsymbol{x},0)$があれば$\rho(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},0)\,\mathrm{e}^{-(\sigma/\epsilon)t}$であることを示せ。このように、何らかの理由で導体中に電荷が生じた場合でもϵ/σ程度の時間で消えるので、(σの大きい) 導体中では$\rho(\boldsymbol{x},t)=0$ と考えてかまわない。
   (b) 導体中での電磁場を決める方程式が $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0,\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0,\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\partial\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)/\partial\,t,\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\sigma\mu\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\mu\,\partial\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)/\partial\,t$ であることを確かめよ。
   (c) これらより $\triangle\,\boldsymbol{E}=\epsilon\mu\dfrac{\partial^2\,\boldsymbol{E}}{\partial\,t^2}+\sigma\mu\dfrac{\partial\,\boldsymbol{E}}{\partial\,t}$と $\triangle\,\boldsymbol{B}=\epsilon\mu\dfrac{\partial^2\,\boldsymbol{B}}{\partial\,t^2}+\sigma\mu\dfrac{\partial\,\boldsymbol{B}}{\partial\,t}$を導け。
   (d) x 方向に進む振動数ωの平面電磁波が、$x>0$ の半無限領域にある導体に入射した。導体中での電場を$\boldsymbol{E}(x,t)=\mathrm{Re}\ E_0\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$と書いたとき、$k$ は $k^2=\epsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega$ であることを示せ。
   (e) $k\equiv k'+ik''$と書くと$\boldsymbol{E}(x,t)=\mathrm{Re}\ E_0\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{e}^{i(k'x-\omega t)}\,\mathrm{e}^{-k''x}$であるから、$k''>0$ であればこの電磁波は導体中に$\delta\equiv 1/k''$程度の距離までしか進入できない。$k'>0$ であることに注意して k''を求め、$\sigma/\epsilon\omega\gg 1$ のとき$\delta\approx\sqrt{2/\sigma\mu\omega}$であることを示せ。

2. 導体中に体積 V の立方体の空洞があって、その中に電磁波が閉じ込められているとしよう。
   (a) 先ず、波数$\boldsymbol{k}$の平面波 (とそれが空洞の壁で反射されてできた平面波) だけが空洞中にある場合を考える。前回の演習問題 (No.8) よりこの電磁波の平均運動量が $(1/c)\,\bar{w}V\,\boldsymbol{k}/|\,\boldsymbol{k}\,|$ であることを知っている。立方体のひとつの面に垂直に x 軸を取ると、この平面波のこの面におよぼす圧力が$\bar{w}k_x^2/|\,\boldsymbol{k}\,|^2$であることを確かめよ。$\bar{w}$は単位体積あたりの電磁波の平均エネルギーである。
   (b) 次に、同じ $|\,\boldsymbol{k}\,|$ を持ち、いろいろな方向を向いた平面波が、いづれの方向にも均等にある場合を考える。着目している面の受ける圧力が$\bar{w}/3$ であることを示せ。
   (c) このことから、いろいろな波数$\boldsymbol{k}$をもつ平面波が温度 T の熱平衡分布を作るように空洞内にあるとき、圧力と単位体積あたりの電磁場のエネルギーの熱平均値を $p(T),\ u(T)$ と書くと、$p(T)=u(T)/3$ である。熱力学の関係式 $d(uV)=T\,dS-p\,dV$ に注意して、$\dfrac{\partial\,S(T,V)}{\partial\,T}=\dfrac{V}{T}\dfrac{du(T)}{dT}$と$\dfrac{\partial\,S(T,V)}{\partial\,V}=\dfrac{4}{3}\dfrac{u(T)}{T}$を示せ。$S(T,V)$ は電磁場のエントロピーである。
   (d) $\dfrac{\partial}{\partial\,T}\dfrac{\partial\,S(T,V)}{\partial\,V}=\dfrac{\partial}{\partial\,V}\dfrac{\partial\,S(T,V)}{\partial\,T}$より、$u(T)\propto T^4$を示せ。これはシュテファン・ボルツマンの法則として知られている。

3. 与えられた静磁場$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ の中を閉曲線が動く場合を考える。時刻 t での閉曲線を C_t、これによって囲まれた曲面を S_tとし、C_t上の点$\boldsymbol{s}$は$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})$ の速度で移動するとしよう。
   (a) $\Phi(S_t)\equiv\int_{S_t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cdot d\,\boldsymbol{S}$と書いたとき、$\Phi(S_{t+\delta t})-\Phi(S_t)=-\delta t\oint_{C_t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{s})\cdot d\,\boldsymbol{s}$であることを確かめよ。$C_t$とともに移動する単位点電荷が$\boldsymbol{s}$にあったとすると、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{s})$ はこの粒子が静磁場$\boldsymbol{B}$から受けるローレンツ力である。したがって、C_tが荷電粒子を含む金属導線のようなものであれば、これらの粒子がローレンツ力により仕事をされて、C_tには起電力$\phi(C_t)\equiv\oint_{C_t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{s})\cdot d\,\boldsymbol{s}$が生じる。
   (b) この起電力が$\phi(C_t)=-d\Phi(S_t)/dt$ の様に、電磁誘導の法則と同じ形に表されることを確かめよ。起電力を生じるこのメカニズムは発電機の原理として応用されている。この起電力はローレンツ力により生じたものであり、誘導起電力とは異なるものであることに注意しよう。