2002/07/15

電磁気学 2(共通教育、田中担当クラス) 演習問題

1. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x})$ とすれば、$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ となることを示せ。

2. $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ とすれば、$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ となることを示せ。

3. マクスウェル方程式から電荷保存則を導け。

4. $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$ を示せ。

5. 球対称な系であれば、静電ポテンシャルは動径 r のみの関数となる。すなわち、$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(r), \quad r = |\boldsymbol{x}|$ である。

   (a) このとき、
   $$\triangle\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right)$$
   であることを示せ。

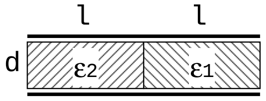
   (b) 上の結果を利用して、真空中で静電ポテンシャルが $-e^{-r/a}/(\varepsilon_0 r)$ となるような電荷分布を求めよ。

6. 真空中の一様に帯電した球の静電ポテンシャルを求めよ。さらに、静電場のエネルギーが
   $$W = \frac{1}{2}\int \phi(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})d^3x \tag{1}$$
   で表されることを用いて、この静電場のエネルギーを求めよ。また、この結果を §I.4 の例題 2 と比較せよ。

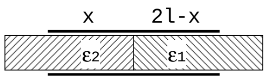
7. 大気中には、地表近くに下向きの電場 $E \simeq 100\mathrm{V/m}$ が存在する。地球自体は導体であると考え、地球は等ポテンシャル球であるとして、地表の全電荷を求めよ。

8. 式 (1) を用いて、$\pm Q$ の電荷を持ち電位差が V の 2 つの導体からなるコンデンサーのエネルギーを求めよ。

9. 平行板コンデンサーの極板間を図のように誘電率 ε_1、ε_2 の誘電体で満たした。極板の長さは $2l$、幅 (奥行き) は w、極板間の距離は d、それぞれの誘電体の長さは l である。極板間の電位差を V としたとき、極板間の電場 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、極板の電荷密度を求めよ。さらに、このコンデンサーの静電容量を求めよ。



10. 前問と同じ形状のコンデンサーに、極板の電荷を $\pm Q$ に固定して、図のように固体誘電体を挿入した。誘電体の境界面にはどのような力が働くか。ただし $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ とする。



11. 極板間の距離 d_1 の平行板コンデンサーを誘電率 ε の固体誘電体で満し、電源をつなぎ極板間の電位差を V_1 とした。電源を切離し、極板間の距離を d_2 に拡げた。(誘電体のない部分の距離は $d_2 - d_1$ である。) このときの極板間の電位差を求めよ。

12. 厚さ $2d$ の薄い誘電体の板が一様に法線方向に分極している。法線を z 軸にとると $\boldsymbol{P} = P\hat{z}$ である。(この分極は外場がなくても存在する永久分極であるとする。)

    (a) この誘電体の分極表面電荷密度、分極体積電荷密度を求めよ。

    (b) 誘電体内外の $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ を求めよ。

    (c) 誘電体内外の静電ポテンシャルを求めよ。

    (d) この系を平行板コンデンサーと比較せよ。

13. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$ を示せ。

14. ビオ-サバールの法則を用いて無限に長い直線定常電流 I のまわりの磁束密度を求めよ。

15. ビオ-サバールの法則を用いて半径 a の円電流 I の中心軸上の磁束密度を求めよ。

16. 地磁気は地球の中心にある磁気双極子モーメントによる磁場で近似的に説明される。極点での $\boldsymbol{B}$ の大きさを $0.6\mathrm{G}$ とすれば、この磁気双極子モーメントの大きさはいくらになるか。($1\mathrm{G} = 10^{-4}\mathrm{Weber/m^2}$ である。) また、赤道上での $\boldsymbol{B}$ の大きさはどれぐらいか。ただし、磁気双極子と自転軸のなす角度を 180° とせよ。(本当は 168.5° である。)

17. 半径 a の円形電流は遠く $(r \gg a)$ から見れば近似的にその中心軸上の磁気双極子と等価である。このことを利用して、この円形電流の遠方での磁束密度を求め、問題 15 の結果と比較せよ。

講義で取りあげた例、例題の復習と平行してこれらの演習問題を解けば効果的である。

http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/tanaka/kougi.html