7　静電場とポアッソン方程式

(1)
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,,$$

(2)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})\,.$$

静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は式 (1) を適当な境界条件のもとで解くことによって決定され，静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は式 (2) から求る.
特に電荷がないところ ($\rho(\boldsymbol{r}) = 0$) では,

(3)
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,$$
ラプラス (Laplace) 方程式 .

- デカルト (カーテシアン) 座標では,

(4)
$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

○ 例題 1: 無限に広い平行板コンデンサー

真空中に 2 枚の無限に広い導体の板 A，B が距離 d だけ離れて平行に置かれている．導体の法線を z 軸にとり，$z=0$ が板 A，$z=d$ が板 B であるとする．A の電位を ϕ_A，B の電位を ϕ_B として，AB 間の電場を求める．

$\phi(\boldsymbol{r})$ は z のみの関数ゆえ $\phi(\boldsymbol{r})=\phi(z)$ と書く．AB 間に電荷は無いから，式 (1) より，

(5)
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z)=0\,.$$

解は，c_0，c_1 を定数として，

(6)
$$\phi(z)=c_0+c_1 z\,.$$

境界条件 $\phi(0)=\phi_A$，$\phi(d)=\phi_B$ より，

(7)
$$\phi(z)=\phi_A+\frac{\phi_B-\phi_A}{d}z\,.$$

式 (2) より，電位差 $V \equiv \phi_B - \phi_A$ を用いると，

(8) $$E_z(z) = -\frac{V}{d}\,,\ E_x = E_y = 0\,.$$

すなわち，($V > 0$ として) 電場は板の法線方向の逆を向き，一定である．

- 円柱 (円筒) 座標 (r, φ, z):

(9) $$x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,,\ z = z\,. \qquad (注 : |\boldsymbol{r}| \neq r)$$

円柱座標の (直交) 基底ベクトルは，$\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ で，

(10) $$\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi\,,\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\,,\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

線要素は，

(11) $$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}dz\,.$$

全微分は，

(12) $$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz\,.$$

(13) $$df = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla f = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f\,dr + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\nabla f\,rd\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla f\,dz$$

と比較して,

(14) $$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\,,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,,\quad \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

つまり，円柱座標 (r,φ,z) では,

(15) $$\nabla = (\frac{\partial}{\partial r}\,,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,,\frac{\partial}{\partial z})$$

となる．あるいは,

(16) $$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

ラプラシアンは,

(17) $$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{r}}$$

に注意して,

(18) $$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

○ 例題 2: 半径 a, b ($a < b$) の無限に長い同軸導体円筒
円柱座標で考える. 対称性から, $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)$. 電位差を
$\phi(b) - \phi(a) = V$ とする. 式 (3) は, 式 (18) から,

(19) $$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0\,.$$

解は,

(20) $$\phi(r) = c_0 + c_1 \log r\,.$$

$\phi(b) - \phi(a) = V$ より,

(21) $$\phi(r) = c_0 + \frac{V}{\log(b/a)} \log r \,. \quad (a < r < b)$$

電場は $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}} E_r + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi + \hat{\boldsymbol{z}} E_z = -\nabla\phi(r)$ だから，式 (16) より

(22) $$E_r = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r} = -\frac{V}{\log(b/a)}\frac{1}{r} \,, \; E_\varphi = E_z = 0 \,. \quad (a < r < b)$$

- 球座標 (r, θ, φ)

(23) $$x = r \sin\theta \cos\varphi \,, \; y = r \sin\theta \sin\varphi \,, \; z = r \cos\theta \,.$$

基底ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ は,

(24) $$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}} &= \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta \cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \,, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \,, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\varphi \,. \end{aligned}$$

線要素は,

(25) $$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\, rd\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\, r\sin\theta d\varphi\,.$$

全微分は,

(26) $$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi\,.$$

(27) $$df = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla f = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla f\, dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla f\, rd\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\nabla f\, r\sin\theta d\varphi$$

と比較して,

(28) $$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\,,\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\nabla = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,.$$

つまり, 球座標 (r,θ,φ) では,

(29) $$\nabla = (\frac{\partial}{\partial r}\,, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi})\,.$$

あるいは,

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,. \tag{30}$$

ラプラシアンは,

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,,\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\boldsymbol{r}}\,,\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{31}$$

などに注意して,

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \tag{32}$$

体積要素は,

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,. \tag{33}$$

○ 例題 3: 半径 a，b ($a < b$) の同心導体球面

球座標で考える． $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)$．式 (3) は，式 (32) から，

(34) $$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0$$

解は,

(35) $$\phi(r) = c_0 + \frac{c_1}{r}\,.$$

$\phi(b) - \phi(a) = V$ とすれば,

(36) $$c_1 = \frac{ab}{a-b} V\,.$$

電場は $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}} E_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} E_\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi = -\nabla \phi(r)$ だから，式 (30) より，

(37) $$E_r = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{ab}{a-b} \frac{V}{r^2}\,, \; E_\theta = E_\varphi = 0\,. \quad (a < r < b)$$

● ポアッソン方程式の一般解

$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ で $\phi(\boldsymbol{r}) \to 0$ であるような場合を考える．(電荷が有限の範囲に分布していればよい．)

原点に単位点電荷がある場合,

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\boldsymbol{r})\,. \tag{38}$$

この解は,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|} \tag{39}$$

と知っている．

$$G(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|} \tag{40}$$

とすると,

$$\triangle G(\boldsymbol{r}) = -\delta^3(\boldsymbol{r})\,. \tag{41}$$

この $G(\boldsymbol{r})$ を用いると，

(42)
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

の解は

(43)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV'$$

と書ける．実際，

(44)
$$\begin{aligned}\triangle\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \triangle_r G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,.\end{aligned}$$

従って，式 (42) の解は，

(45)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\,.$$

○ 例題 4: 球対称な電荷分布: $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$.

$\boldsymbol{r}$ の方向を z 軸にとり，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ' とする．式 (45) は,

(46)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty r'^2\,dr' \int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\,.$$

φ' の積分は自明で，$\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$．$\theta'$ の積分は,

(47)
$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta'\,d\theta'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}} = \int_{-1}^1 \frac{d\cos\theta'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}$$
$$= -\frac{1}{rr'}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{rr'}(r+r'-|r-r'|)$$
$$= \begin{cases} 2/r\,, & r > r' \\ 2/r'\,, & r < r' \end{cases}\,.$$

よって，

(48) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' + \int_r^\infty \rho(r')\, r'\, dr'\right].$$

半径 r 内の電荷は，

(49) $$\begin{aligned} Q(r) &= \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'. \end{aligned}$$

これを用いて，

(50) $$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho(r')\, r'\, dr'.$$

◇ 電荷が半径 a の球内にのみあるとき，全電荷は $Q = Q(a)$.

(51) $$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \quad (r > a)$$

(原点に点電荷 Q があるときと同じ．)

◇ 電荷が球殻に分布している場合:

(52) $$\rho(r) \begin{cases} \neq 0\,, & r_1 < r < r_2 \\ = 0\,, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$r < r_1$ では,

(53) $$\phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \rho(r')\, r'\, dr' = \text{定数}\,.$$

従って，$\boldsymbol{E} = 0$.（電場はない．）

$r > r_2$ では，($Q = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r'^2\, dr' =$ 球殻の全電荷)

(54) $$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \quad (\text{点電荷と同じ})$$