8　静電ポテンシャルの多重極展開

● 原点 O を中心とする半径 a の球内に電荷分布が収まっているとする．

(1)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

で $r \equiv |\boldsymbol{r}|$, $r' \equiv |\boldsymbol{r}'|$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' = rr'\cos\theta'$ とする．$\boldsymbol{r}$ を半径 a の球の外の点とすると，$r' < a < r$．このとき，

(2)
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}$$

を r'/r の冪級数に展開する．

(3)
$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2(r'/r)\cos\theta'+(r'/r)^2}} \\ &\equiv \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta')\,.\end{aligned}$$

$P_\ell(x)$ をルジャンドル (Legendre) 多項式という．最初の数項を計算してみると，$(\cos\theta' = x)$

(4) $$P_0(x) = 1\,,\ P_1(x) = x\,,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \cdots\,.$$

一般形は，(例えば)

(5) $$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell\,.$$

式 (3) を式 (1) に代入して，

(6) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r^\ell}\int \rho(\boldsymbol{r}')P_\ell(\cos\theta')r'^\ell dV' \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty}\phi_\ell(\boldsymbol{r})\,.$$

- 遠方 $(r \gg a)$ で最も重要な項は $\ell = 0$ の $\phi_0(\boldsymbol{r})$.

(7) $$\phi_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho(\boldsymbol{r}')dV' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

ただし，$Q \equiv \int \rho(\boldsymbol{r})dV$ は全電荷．すなわち，十分遠くから見れば，どのような (有限範囲の) 電荷分布も (等量の) 点電荷と見なせる．

○ 遠方で次に重要な項は $\ell = 1$ の $\phi_1(\boldsymbol{r})$．(もし，$Q = 0$ であれば，$\ell = 1$ の項が最も重要となる．)

(8) $$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \rho(\boldsymbol{r}')\cos\theta'\, r'\, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int \rho(\boldsymbol{r}') r r' \cos\theta'\, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\boldsymbol{r}\cdot\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\, dV' \end{aligned}$$

(9)
$$\boldsymbol{p} \equiv \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\, dV$$

を用いると,

(10)
$$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p}\,.$$

$\boldsymbol{p}$ を 電気双極子モーメント(電気双極子能率) という.
注: 一般には $\boldsymbol{p}$ は本当のベクトルではない. 実際, 座標の原点を $\boldsymbol{b}$ だけずらして $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}$ とすると,

(11)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\, dV = \int (\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b})\rho(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b})\, dV' \\ &= \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b})\, dV' + \boldsymbol{b} \int \rho(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b})\, dV'\,.\end{aligned}$$

新しい座標で見た電荷分布 $\bar{\rho}(\boldsymbol{r}') \equiv \rho(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{b})$ を用いて,

(12) $$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}'\bar{\rho}(\boldsymbol{r}')\,dV' + \boldsymbol{b}\int \bar{\rho}(\boldsymbol{r}')\,dV' = \bar{\boldsymbol{p}} + Q\boldsymbol{b}\,.$$

($\bar{\boldsymbol{p}}$ は新しい座標で見た電気双極子モーメント．)
$Q \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{p}$ は座標による．(ベクトルではない．)
$Q = 0$ のとき，$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$. 座標によらない．(ベクトル．)

○ $\ell = 2$ のとき，

(13) $$\phi_2(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2}\frac{1}{r^3}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j\,.$$

ここで， Q_{ij} は電気四重極子モーメントで，

(14) $$Q_{ij} \equiv \int (r_i r_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\boldsymbol{r}^2)\rho(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$

○ $\ell \geq 3$ についても同様に展開でき，このような展開を多重極展開という．

• 例: デカルト座標で $(0, 0, d/2)$ と $(0, 0, -d/2)$ にそれぞれ $+q$ と $-q$ の点電荷がある場合. $(d > 0)$
点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と各点電荷との距離を $r_\pm$ とすると,

(15)
$$r_\pm = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2} \ .$$

ポテンシャルは,

(16)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) .$$

$r \equiv |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$ では,

(17)
$$r_\pm = r\sqrt{1 \mp \frac{zd \mp d^2/4}{r^2}} = r \mp \frac{z}{2}\frac{d}{r} + \cdots \ .$$

(18)
$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \simeq \frac{zd}{r^3} \ .$$

よって,

(19) $$\phi(\boldsymbol{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{zd}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, \quad \boldsymbol{p} = qd\,\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

一般論での結果を使うならば,

(20) $$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r} - \frac{d}{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}) - q\delta^3(\boldsymbol{r} + \frac{d}{2}\,\hat{\boldsymbol{z}})$$

であるから,

(21) $$\int \rho(\boldsymbol{r})\,dV = q - q = 0\,. \quad (\text{全電荷はゼロ})$$

よって,

(22) $$\phi_0(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

(23) $$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\,dV = q\,\frac{d}{2}\,\hat{\boldsymbol{z}} - q\left(-\frac{d}{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}\right) = qd\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

となり，

(24) $$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

より，式 (19) と一致する．

● 電気双極子の作る電場

ポテンシャル

(25) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

より，$\nabla(1/r^3) = -3\boldsymbol{r}/r^5$，$\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}$ を用いて，

(26) $$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\,\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}}{r^5}\,. \quad (r \neq 0)\end{aligned}$$

○ 例題 1: 球座標での電気双極子の作る電場

$\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ とする.

(27)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\,.$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ より，式 (1. 7. 29) を用いて，

(28)
$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\theta}{r^3}\,, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\,, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi = 0\,. \end{aligned}$$

● 外場中の電気双極子のエネルギー

外場を $\phi_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})$ とする．電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ の $\phi_{\text{ext.}}$ 中でのエネルギーは，

(29) $$W = \int \rho(\boldsymbol{r})\phi_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})\, dV\, . \qquad \text{cf. 式 (1. 4. 22)}$$

原点を適当に選んで，そのまわりに $\rho(\boldsymbol{r})$ が分布しているとする．$\rho(\boldsymbol{r}) \neq 0$ の領域で $\phi_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})$ が緩やかに変化しているとして，$\phi_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})$ を原点のまわりでテイラー展開すると，

(30) $$\begin{aligned} \phi_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r}) &= \phi_{\text{ext.}}(0) + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\phi_{\text{ext.}}(0) + \cdots \\ &= \phi_{\text{ext.}}(0) - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext.}}(0) + \cdots\, . \end{aligned}$$

式 (29) に代入して，

$$W = \phi_{\text{ext.}}(0)\int \rho(\boldsymbol{r})\,dV - \boldsymbol{E}_{\text{ext.}}(0)\cdot\int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\,dV + \cdots$$
$$= Q\phi_{\text{ext.}}(0) - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext.}}(0) + \cdots\ . \tag{31}$$

電気双極子では $Q=0$ ゆえ,

$$W = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext.}}(0)\,. \tag{32}$$

$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{E}_{\text{ext.}}$ が同じ方向のときエネルギーが最小.