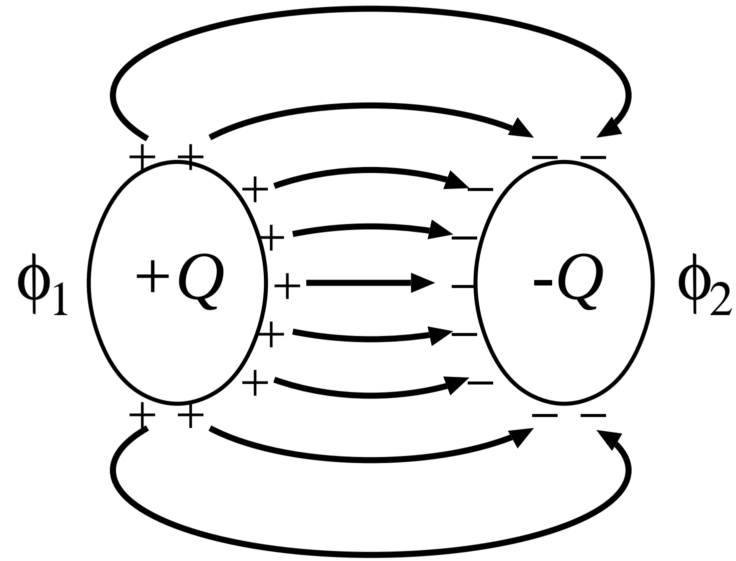
3 コンデンサー(復習)

- コンデンサーとは.

2 つの導体があってそれぞれに $+Q$, $-Q$ の電荷があり，一方から出た電気力線が必ず他方に入るような系.
2 つの導体をその大きさに較べて十分近づけると (近似的に) コンデンサーになる.
導体 1(2) の電位を $\phi_{1(2)}$ とすると，
$Q \propto \phi_1 - \phi_2$. ($\because$ 重ね合わせの原理)



(1) $$\boxed{C \equiv \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \ : \ \text{静電容量 (電気容量)}}$$

単位は F(ファラッド) $= C$(クーロン)$/V$(ボルト).

● 例: 平行板コンデンサー

極板の面積を A，極板間の距離を d とする．極板の大きさに較べて d が十分小さいとすれば，端の効果は無視できて，無限に広い導体板についての結果を利用できる．

例題 1. 7. 1 より，($\phi_{A(B)} \to \phi_{1(2)}$ などと読みかえて，$\phi_1 - \phi_2 > 0$ とする．)

(2)
$$E_z = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}\,. \qquad (一定)$$

一方，極板 1 の内側表面の薄い円柱 (底面積 a) にガウスの法則の積分形

(3)
$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} dV$$

を適用すると，

(4)
$$E_z a = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma a\,. \qquad (\sigma：\ 導体表面の電荷密度)$$

よって，

(5) $$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

式 (2) と比較して,

(6) $$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{d}(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

極板 1 の全電荷 Q は

(7) $$Q = \sigma A = \frac{A\varepsilon_0}{d}(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

従って静電容量は,

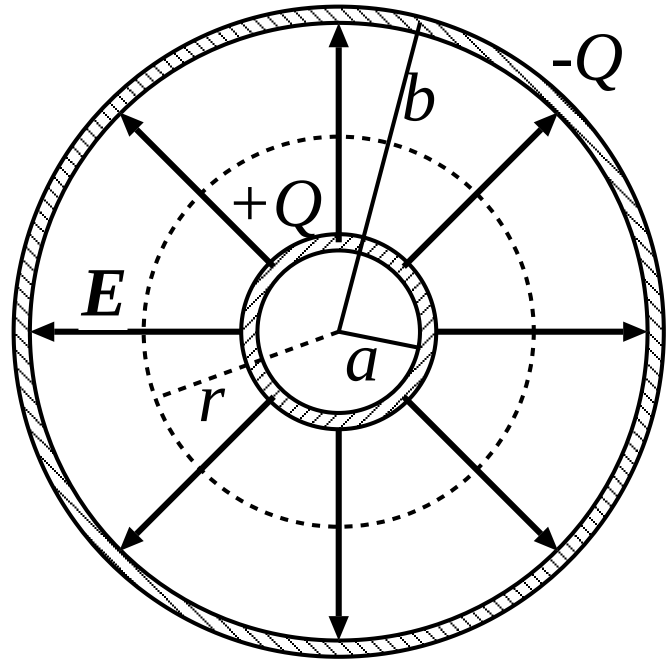
(8) $$C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\,.$$ (平行板コンデンサーの静電容量)

○ $A = 1m^2$, $d = 10^{-4}m(= 0.1mm)$ とすると,

(9) $$C \simeq 9 \times 10^{-12} \cdot \frac{1}{10^{-4}} \sim 10^{-7}F = 0.1\mu F\,.$$

例 2: 球形コンデンサー (同心導体球面)

内側の導体: 半径 a，電荷 $+Q$.
外側の導体: 半径 b，電荷 $-Q$.
対称性から $\boldsymbol{E}$ は動径方向を向き，その大きさは $E = E(r)$ (r のみの関数．)
積分形のガウスの法則



(10) $$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

を半径 $r(a < r < b)$ の球面に適用すると，

(11) $$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

よって，

(12) $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,.$$

例題 1. 7. 3 の式 (37) と比較して,

(13)
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{ab}{b-a}\{\phi(a) - \phi(b)\}\,.$$

よって，静電容量は,

(14)
$$C = \frac{Q}{\phi(a) - \phi(b)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}\,.$$

- コンデンサーのエネルギー

式 (1. 4. 22)

(15)
$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV$$

を用いると，導体外では $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ ゆえ,

(16)
$$W = \frac{1}{2}\int_{\text{導体 1}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV + \frac{1}{2}\int_{\text{導体 2}} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$

導体中ではポテンシャルは一定だから,

(17)
$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\phi_1 \int_{\text{導体 1}} \rho(\boldsymbol{r})\, dV + \frac{1}{2}\phi_2 \int_{\text{導体 2}} \rho(\boldsymbol{r})\, dV \\
&= \frac{1}{2}\phi_1 Q - \frac{1}{2}\phi_2 Q = \frac{1}{2} Q(\phi_1 - \phi_2)\,.
\end{aligned}
$$

C を用いると,

(18)
$$
W = \frac{Q^2}{2C}\,.
$$