

4 誘電体を含むコンデンサー

- 誘電率 ε の誘電体で内部が満たされた平行板コンデンサー.
2つ導体 (極板) の電位を ϕ_1 , ϕ_2 に固定してあるとしよう.

$$(1) \quad E_z = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}$$

は, 誘電体のないときと変わらない. 一方, 式 (2. 3. 5) は, ガウスの法則 (式 (2. 2. 6)) の積分形

$$(2) \quad \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_f(\mathbf{r}) dV$$

から (今の場合, ρ_f は導体の電荷), σ_f を導体表面の電荷密度として,

$$(3) \quad D_z = \sigma_f \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\sigma_f}{\varepsilon}.$$

従って,

$$(4) \quad \sigma_f = \frac{\varepsilon}{d}(\phi_1 - \phi_2).$$

よって,

$$(5) \quad C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{\sigma_f A}{\phi_1 - \phi_2} = \varepsilon \frac{A}{d}.$$

真空の場合 (式 (2.3.8)) と比較すると, 静電容量は

$$(6) \quad \varepsilon^* \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \underline{\text{比誘電率}}$$

倍になっている. 通常 $\varepsilon > \varepsilon_0$ であったから,

$$(7) \quad \varepsilon^* > 1.$$

すなわち, 静電容量は増加する.

○ 比誘電率の例

	ϵ^*
雲母	~ 9
パラフィン	~ 2
エチルアルコール	~ 20
水	~ 80
空気	1.005 (1 気圧 20°C)
(真空)	(1)

- コンデンサーの中で何が起っているのか？

導体 1, 2 の電荷を $\pm Q$ とする. (これを固定して考える.)

導体 1, 2 の電荷面密度 σ_f は

$$(8) \quad \sigma_f = \pm \frac{Q}{A}.$$

真空の場合, $\sigma = \sigma_f$ であるから,

$$(9) \quad E_{z, \text{真空}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}.$$

一方, 誘電体があると分極 \mathbf{P} が生じ, 誘電体の表面に分極表面電荷密度 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ が生じる. $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ より, 導体 1, 2 の側でそれぞれ,

$$(10) \quad \sigma_p = \mp \chi_e E_z.$$

この σ_p の作る電場は, σ_f の作る電場を弱める.

$$(11) \quad \sigma = \sigma_f + \sigma_p = \frac{Q}{A} - \chi_e E_z$$

を用いて,

$$(12) \quad E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{A} - \chi_e E_z \right).$$

これを E_z について解くと,

$$(13) \quad E_z = \frac{1}{\varepsilon_0 + \chi_e} \frac{Q}{A} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{A} = \frac{1}{\varepsilon^* \varepsilon_0} \frac{Q}{A}.$$

すなわち, $\varepsilon^* > 1$ ゆえ,

$$(14) \quad E_z < E_{z, \text{真空}}.$$

同じ電荷 Q に対して，電位差が

$$(15) \quad \phi_1 - \phi_2 = E_z d < E_{z, \text{真空}} d = \phi_{1, \text{真空}} - \phi_{2, \text{真空}}$$

と， $1/\varepsilon^*$ 倍だけ小さくなる． $C = Q/(\phi_1 - \phi_2)$ ゆえ， C は ε^* 倍だけ大きくなる．すなわち，

$$(16) \quad \frac{C}{C_{\text{真空}}} = \varepsilon^* .$$