6 誘電体の静電エネルギーと力

$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ と書ける誘電体 について考える.

- 静電エネルギーは,

(1) $$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\, dV\,. \qquad (\text{§ } 1.\ 4)$$

今，真空中で電荷分布 $\rho_0(\boldsymbol{r})$ が作る電場を $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ とすると,

(2) $$W_0 = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{r})\, dV\,. \quad (\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0)$$

$\rho_0(\boldsymbol{r})$ を固定したまま，誘電率 ε の誘電体 V を電場内に持ち込み,
$\boldsymbol{E}_0$ が $\boldsymbol{E}$ に変化したとする.

(3) $$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \varepsilon\,, & \boldsymbol{r} \in V\,, \\ \varepsilon_0\,, & \boldsymbol{r} \notin V\,, \end{cases}$$

として，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ とすれば，エネルギーは，

$$W_1 = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\, dV \tag{4}$$

となる．誘電体のエネルギーは，

$$\begin{aligned} W &= W_1 - W_0 = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{D}_0)\, dV \\ &= \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_0 - \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{D})\, dV + \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_0)\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\, dV\,. \end{aligned} \tag{5}$$

$\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E}_0 = 0$ ゆえ，$\nabla \times (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_0) = 0$．よって，ポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{r})$ が存在して，

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_0 = -\nabla\Phi \tag{6}$$

と書ける．

(7) $$\int (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_0)\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\,dV = -\int (\nabla\Phi)\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\,dV = \int \Phi\,\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)\,dV\,.$$

(部分積分した．表面項はゼロ．) $\rho_0(\boldsymbol{r})$ は固定しているから，

(8) $$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{D}_0=\rho_0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_0)=0\,.$$

よって，

(9) $$W=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_0-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{D})\,dV\,.$$

積分は元々全空間だが，$\boldsymbol{D}_0=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$，$V$ の外では $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ゆえ，V の内だけ考えればよい．V の内では $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ だから，

(10)
$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_0 - \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{D})\,dV \\ &= \frac{1}{2}\int_V (\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0 - \varepsilon\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E})\,dV \\ &= -\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_0\,dV = -\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_0\,dV \end{aligned}$$

(cf. 式 (1. 8. 32))

通常，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{E}_0$ は同じ方向を向くから ($\varepsilon - \varepsilon_0 > 0$)，$|\boldsymbol{E}_0|$ が大きいほどエネルギーは小さい.

$\Longrightarrow$ 電場の強い方へ誘電体は動こうとする.

- 誘電体を $d\boldsymbol{r}$ だけ動かしたときのエネルギーの変化を dW とし，誘電体に働く力を $\boldsymbol{F}$ とすれば,

(11)
$$dW = -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

よって,

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W \tag{12}$$

と書ける.

- 直感的な説明

電場よって誘電体は分極を起こし分極電荷が生じる．分極電荷の総和はゼロであるから，もし電場が一様であれば誘電体全体には力は働かない.
しかし，電場の強さが (誘電体の) 場所によって異なっていれば,
分極電荷のうち電場が強い場所に生じたものには強い力が働き,
電場が弱い場所に生じたものには弱い力しか働かない．従って,
誘電体全体に力が働くことになる.

● 例題: 平行板コンデンサーへの誘電体の挿入

極板の長さ L，幅 w，極板間の距離 d の平行板コンデンサーを考える．各極板の電荷を $\pm Q$ に固定する．このコンデンサーに長さ方向から誘電率 ε，幅 w，厚さ d で十分に長い誘電体を挿入する．今，長さ $x(0 < x < L)$ だけ誘電体がコンデンサー中に入っているとする．このときの容量は,

$$C = \varepsilon_0 \frac{w(L-x)}{d} + \varepsilon \frac{wx}{d} \,. \tag{13}$$

コンデンサーのエネルギーは $W = Q^2/(2C)$ ゆえ,

$$F = -\frac{dW}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{w}{d} (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (> 0) \,. \tag{14}$$

(x の増える向きに F が働く．)