# 第3章 物質中の磁場

Minoru TANAKA (Osaka Univ.)

# 1　定常電流の作る磁場(復習)

- 電荷保存則 (§ 1. 2)

(1)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0\,.$$

定常状態では,

(2)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = 0$$

となる.

- ベクトルポテンシャルのポアッソン方程式 (§ 1. 6)

(3)
$$\triangle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0\,.$$

($\Longleftrightarrow \triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$)
静電場のとき (§ 1. 7) と同様にして，一般解は,

(4)
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,dV'$$

と書ける.

• $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ を確かめる．

(5)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \nabla_r \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\, dV'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left( \nabla_{r'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\, dV'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \nabla_{r'} \left( \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) - \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \nabla_{r'} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \right] dV'$$

(第 2 項は $\nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0$ で消える)

(第 1 項にガウスの定理を適用すると)

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \cdot d\boldsymbol{S}' = 0$$

(電荷分布を有限範囲として，遠方で $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') = 0$ を用いた．)

● ビオ–サバール (Biot–Savart) の法則

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ より，

(6)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_r \times \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, dV' \, .$$

成分で考えると，

(7)
$$\begin{aligned} \left( \nabla_r \times \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{i_z(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{i_y(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\ &= -i_z(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + i_y(\boldsymbol{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\ &= \left( \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \times \nabla_{r'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right)_x \, . \end{aligned}$$

また，

(8)
$$\nabla_{r'} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, .$$

よって，定常電流の作る磁束密度は，

(9)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV'\,.$$

○ 細い導線を流れる電流 $I$ の場合，断面 $S$ の積分が実行できて，

(10)
$$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\,dV' = I\,d\boldsymbol{r}'$$

と書けるから，

(11)
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,.$$

(積分は導線にそって行なう．)

● 定常電流による磁場のエネルギー

§ 1. 4 より，

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\, dV = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}\, dV \tag{12}$$

$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}$
(cf. 式 (1. 4. 7)) を用いて，

$$W = \frac{1}{2}\int \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H})\, dV + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}\, dV\,. \tag{13}$$

第 1 項はガウスの定理からゼロ．結局，

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\, dV\,. \tag{14}$$

(cf. 式 (1. 4. 22))