3　A(r) の多重極展開

静電ポテンシャルの多重極展開 (§ 1. 8) と同様に考える.

● 原点 O を中心とする半径 a の球内に定常的な電流分布があるとする.

(1)
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'\,.$$

$r = |\boldsymbol{r}|$, $r' = |\boldsymbol{r}'|$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' = rr'\cos\theta'$, $r' < a < r$ とすると,

(2)
$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta')$$

と書けるから,

(3)
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_\ell(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{r^\ell}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')r'^{\ell}P_\ell(\cos\theta')\,dV'\,.$$

○ $\ell = 0$ の項

(4) $$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\, dV' \,.$$

(cf. 式 (1. 8. 7)) $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ として,

(5) $$\nabla_{r'} \cdot (x' \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')) = (\nabla_{r'}\, x') \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') + x'\, \nabla_{r'} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') = i_x(\boldsymbol{r}')$$

よって,

(6) $$\int i_x(\boldsymbol{r}')\, dV' = \int \nabla_{r'} \cdot (x' \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}'))\, dV' = \int_S x' \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

(S を十分大きくとる．) y, z 成分も同様で,

(7) $$\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\, dV' = 0\,. \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

(磁荷がないことに対応．)

○ $\ell = 1$ の項

(8) $$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')r'\cos\theta'\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\,dV' \,.$$

公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ を用いると，

(9) $$(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}'))\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}) \,.$$

よって，

(10) $$\begin{aligned} &\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\,dV' \\ = \;& \left[\int \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\,dV'\right]\times\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r})\,dV' \,. \end{aligned}$$

また，

(11)
$$
\begin{aligned}
& \nabla_{r'} \cdot \left(x'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\right) \\
= & \left(\nabla_{r'} x'\right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \left(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}\right) + x'\left(\nabla_{r'}(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r})\right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \\
& + x'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}) \nabla_{r'} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \\
= & i_x(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}) + x' \, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

ゆえ，

(12)
$$
\begin{aligned}
& \int i_x(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}) \, dV' + \int x' \, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{r} \, dV' \\
= & \int \nabla_{r'} \cdot \left(x'(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\right) dV' = \int x' \left(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}\right) \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{S}' = 0 \,.
\end{aligned}
$$

すなわち，

(13)
$$
\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}) \, dV' + \int \boldsymbol{r}' \left(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{r}\right) dV' = 0 \,.
$$

式 (10)，(13) より，

(14) $$\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r})\,dV' = \frac{1}{2}\left[\int \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\,dV'\right]\times\boldsymbol{r}\,.$$

よって,

(15) $$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,.$$

ここで,

(16) $$\boldsymbol{m} \equiv \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$ 磁気双極子モーメント

(cf. $\phi_1(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/(4\pi\varepsilon_0 r^3),\ \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV$)

$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = 0$ だから，遠方では $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ が最も重要になる.

- 平面回路 C を流れる電流 I の磁気双極子モーメント

細い導線の断面 S について積分できて,

(17) $$\int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,dV = I\,d\boldsymbol{r}\,.$$

よって,

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2}\int_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}\,. \tag{18}$$

$|\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}|/2$ は微小三角形の面積. C の囲む面の法線方向 (右ねじの進む方向を正にとる) の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と書けば,

$$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}\,, \quad S : C \text{ に囲まれる平面の面積}\,. \tag{19}$$

$\boldsymbol{m}$ の単位は Am^2.

○ $\boldsymbol{m}$ は原点の取り方に依らない. (本当のベクトル.)

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ と原点をずらすと ($\boldsymbol{a}$:定数ベクトル)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,dV = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a})\,dV' \\ &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}'\times\bar{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{r}')\,dV' + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\int\bar{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{r}')\,dV'\,. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで, $\bar{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{r}') \equiv \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a})$ は新しい座標で見た電流分布.

式 (7) を用いると第 2 項の積分はゼロになり,

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}' \times \bar{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{r}')\,dV' \equiv \bar{\boldsymbol{m}}\,. \tag{21}$$

$\bar{\boldsymbol{m}}$ は新しい座標での磁気モーメント.

- 磁気双極子の作る磁場

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,. \tag{22}$$

を代入して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{r^3}\nabla\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})\right]\,. \end{aligned} \tag{23}$$

$\nabla(1/r^3) = -3\boldsymbol{r}/r^5$, $\nabla\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{m}$ を用いて,

(24) $$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-3\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})+2r^2\boldsymbol{m}}{r^5}\,.$$

公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ から，
$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}) = r^2\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m})\boldsymbol{r}$．よって，

(25) $$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{m}}{r^5}\,. \qquad (r\neq 0)$$

- 静磁場中の磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ に働く力

(26) $$\boldsymbol{m} \equiv \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$

$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ は原点付近に分布しているとし，外部磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(\boldsymbol{r})$ は原点付近でゆっくり変化するものとして，テーラー展開する．

(27) $$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)+\cdots\,.$$

§ 3. 2 より，

(28) $$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})\, dV$$

$$= \left(\int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\, dV \right) \times \boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(0) + \int \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(0)\, dV\ .$$

第 1 項はゼロ．第 2 項を成分で考えると，($\boldsymbol{B}_{\text{ext.}}$ の $_{\text{ext.}}$ は省略)

(29) $$F_x = \int i_y(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} dV \cdot \nabla)B_z(0) - \int i_z(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} dV \cdot \nabla)B_y(0)$$

$\nabla \cdot (xy\boldsymbol{i}) = i_x y + i_y x$ を用いると，(ガウスの定理も用いて)

(30) $$\int i_y x\, dV = \int (i_y x + i_x y - i_x y)\, dV$$

$$= \int \left[\nabla \cdot (xy\boldsymbol{i}) - i_x y \right] dV = -\int i_x y\, dV\ .$$

他の成分も同様．また，$\int i_x x\,dV = 0$ なども分かる．

$$
\begin{aligned}
(31)\; F_x &= \int i_y \left(x\,dV \frac{\partial}{\partial x} + y\,dV \frac{\partial}{\partial y} + z\,dV \frac{\partial}{\partial z} \right) B_z(0) \\
&\quad - \int i_z \left(x\,dV \frac{\partial}{\partial x} + y\,dV \frac{\partial}{\partial y} + z\,dV \frac{\partial}{\partial z} \right) B_y(0) \\
&= \frac{1}{2} \int \left[(i_y x - i_x y) dV \frac{\partial}{\partial x} + (i_y z - i_z y) dV \frac{\partial}{\partial z} \right] B_z(0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \left[(i_z x - i_x z) dV \frac{\partial}{\partial x} + (i_z y - i_y z) dV \frac{\partial}{\partial y} \right] B_y(0) \\
&= \frac{1}{2} \int \left[(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i})_z dV \frac{\partial}{\partial x} - (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i})_x dV \frac{\partial}{\partial z} \right] B_z(0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \left[-(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i})_y dV \frac{\partial}{\partial x} + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i})_x dV \frac{\partial}{\partial y} \right] B_y(0)
\end{aligned}
$$

(32)
$$F_x = \frac{1}{2}\int [(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})dV \times \nabla]_y B_z(0) - \frac{1}{2}\int [(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})dV \times \nabla]_z B_y(0) = \left[\frac{1}{2}\int [(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})dV \times \nabla]\times \boldsymbol{B}(0)\right]_x = [(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)]_x \ .$$

他の成分も同様で，

(33)
$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)\,.$$

さらに，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ を用いると，

(34)
$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)) - \boldsymbol{m}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0)) = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext.}}(0))\,.$$

● $\boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})$ 中の $\boldsymbol{m}$ のエネルギーを $W(\boldsymbol{r})$ とすれば，$\boldsymbol{F} = -\nabla W(0)$ であるから，

(35) $$W(0) = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(0)\,.$$ (cf. § 1. 8)

$\boldsymbol{m}$ が原点ではなく，$\boldsymbol{r}$ にあれば，

(36) $$W(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_{\text{ext.}}(\boldsymbol{r})$$

となる．

● 2 つの磁気双極子間の相互作用エネルギー
原点に $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{m}_2$ があるとする．$\boldsymbol{m}_1$ が作る磁場は，

(37) $$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}_1}{r^5}\,.$$

従って，エネルギーは，

(38)
$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{r}) &= -\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{r}) - r^2 \boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2}{r^5}\,. \end{aligned}$$

○ $\boldsymbol{m}_1 \| \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{m}_2 \| \boldsymbol{r}$ のとき，

(39)
$$W(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3m_1 m_2 r^2 - r^2 m_1 m_2}{r^5} = -2\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m_1 m_2}{r^3}\,.$$

$F = -dW/dr < 0$ ゆえ，引力.

○ $\boldsymbol{m}_1 \| \boldsymbol{r}$，$-\boldsymbol{m}_2 \| \boldsymbol{r}$ のとき，

(40)
$$W(r) = +2\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m_1 m_2}{r^3}\,.$$

$F = -dW/dr > 0$ ゆえ，斥力.

○ $\boldsymbol{m}_1 \perp \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{m}_2 \perp \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{m}_1 \| \boldsymbol{m}_2$ のとき，

(41)
$$W(r) = +\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{r^3}\,.$$

$F = -dW/dr > 0$ ゆえ，斥力.

○ $\boldsymbol{m}_1 \perp \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{m}_2 \perp \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{m}_1 \| -\boldsymbol{m}_2$ のとき，

(42)
$$W(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_1 m_2}{r^3}\,.$$

$F = -dW/dr < 0$ ゆえ，引力.