4 磁性体と磁化

- 物質を微小な磁気双極子の集まりと考える．

巨視的に見れば十分小さいが多数の磁気双極子を含む領域 ΔV について，磁気双極子モーメントの平均を考える．

(1)
$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i \in \Delta V} \boldsymbol{m}_i}{\Delta V}\,.$$

ここで， $\boldsymbol{m}_i$ は i 番目の磁気双極子モーメント．(巨視的な) 微小体積 dV の磁気双極子モーメントは $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})dV$ となる． $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を 磁化，あるいは 磁化ベクトル という．(cf. 分極ベクトル)

磁性体 とは， $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \neq 0$ となるような物質． $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ は外部磁場によって誘導されれば場合もあるし，外部磁場がなくても存在する場合 (永久磁化) もある．

- $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ によって生じるベクトルポテンシャル

原点に $\boldsymbol{m}$ が存在するとき，(§ 3. 3)

(2) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

であったから，体積密度 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ で領域 V に分布している場合，

(3) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV'\,.$$

ここで，

(4) $$\nabla_{r'}\times\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \left(\nabla_{r'}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') + \frac{\nabla_{r'}\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$
$$= \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} + \frac{\nabla_{r'}\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

を用いると，

(5) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\nabla_{r'}\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' - \int_V \nabla_{r'}\times\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV'\right].$$

◊ ガウスの定理の系

$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\, dV = \int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$ で，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{C}$ は定数ベクトル) と置くと，

(6) $$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))\, dV = \int_S (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})) \cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

公式 $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B}$ を用いると，左辺は

(7) $$\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))\, dV = -\boldsymbol{C} \cdot \int_V \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\, dV\,.$$

公式 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ を用いると，右辺は，

(8) $$\int_S (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})) \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} \cdot \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \times d\boldsymbol{S}\,.$$

まとめると，ガウスの定理の系

(9) $$-\int_V \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\, dV = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \times d\boldsymbol{S}\,.$$

を得る．

これを用いて，

(10) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\nabla_{r'} \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV' + \int_S \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \times d\boldsymbol{S}'\right].$$

(11) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'$$

と比較すれば， $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ による $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を電流によるものと見倣せることが分かる．

(12) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_V \frac{\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV' + \int_S \frac{\boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dS'\right].$$

ここで，

(13) $$\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$$ 体積磁化電流密度，

(14) $$\boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$ 表面磁化電流密度．

($d\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')dS'$．)

- 例: 一様に磁化した無限に長い磁性体の円柱

円柱の中心軸を z 軸にとり，半径を a とする．$\boldsymbol{M} = M\hat{\boldsymbol{z}}$ とする．

(15) $$\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M} = 0\,.$$

(16) $$\boldsymbol{\sigma}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = M\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\,.$$

$\boldsymbol{n}$ は動径方向だから，$\boldsymbol{\sigma}_m$ は φ 方向 (円周方向) を向く．これは無限に長いソレノイドと同じ．
ビオ–サバールの法則より，$\boldsymbol{\sigma}_m$ の方向 (円周方向) の磁場はない，$B_\varphi = 0$．動径方向の磁場は $\pm z$(上下) の寄与が打ち消し合うので，$B_r = 0$．結局，z 成分 B_z のみがゼロでない可能性があり，対称性から，$B_z = B_z(R)$．(R は z 軸からの距離で，z，φ に依らない．)

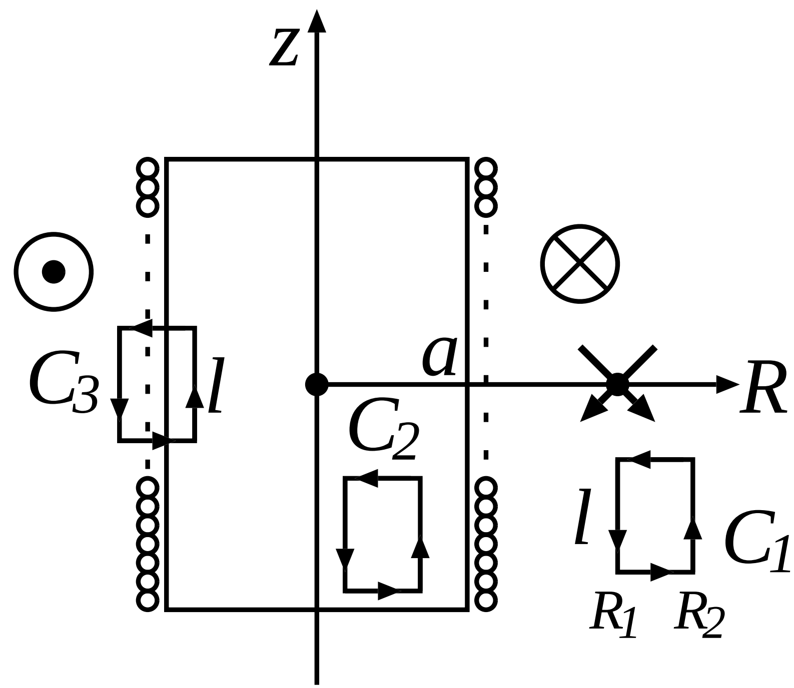
アンペールの法則を閉曲線 C_1 に適用すると，

(17) $$\int_{C_1} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = lB_z(R_2) - lB_z(R_1) = 0\,.$$

よって，

(18) $$B_z(R_1) = B_z(R_2)\,.$$

ソレノイド外部では B_z は一定．同様に C_2 について考えると，ソレノイド内部でも B_z は一定．ソレノイド内部から出た磁束は必ず外部を通って内部に戻らなければならないから，



(19) $$B_z(\text{内部}) \cdot \text{内部の面積} = B_z(\text{外部}) \cdot \text{外部の面積}\,.$$

内部の面積は πa^2，外部の面積は無限大．従って，

(20)
$$B_z(\text{外部}) = 0\,.$$

C_3 にアンペールの法則を適用すると,

(21)
$$lB_z(\text{内部}) = \mu_0 M l\,.$$

まとめると,

(22)
$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0 \boldsymbol{M}\,, & R < a \\ 0\,, & R > a \end{cases}$$