5　磁性体中のマクスウェル方程式

定常的な場合を考える．

- 式 (3. 4. 12) で積分領域を全空間に拡げると，表面積分はゼロとなり，

(1)
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, dV'$$

と書ける．(cf. § 2. 1)

- アンペールの法則 (微分形)

(2)
$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,.$$

この式は微視的には常に正しい．ただし，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ は全ての電流密度．磁性体中では，

(3)
$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}_e(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r})\,.$$

ここで，$\boldsymbol{i}_e(\boldsymbol{r})$ は伝導電流密度，$\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r})$ は磁化電流密度．
$\boldsymbol{i}_m(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を用いると，

(4) $$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{i}_e(\boldsymbol{r})+\mu_0\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\,.$$

(5) $$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\equiv\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\mu_0}-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\,,$$ 磁場の強さ

を導入すると,

(6) $\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{i}_e(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{i}_m$ は忘れて $\boldsymbol{i}_e$ のみ考えればよい．)

となる．(真空中では $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})=0$ だから，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})/\mu_0$．)

○ 例 1: 一様に磁化した無限に長い円柱 (§ 3. 4)

円柱内部では，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{M}$ であったから，

(7) $$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}=0\,.$$

外部では，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}=0$ ゆえ，

(8) $$\boldsymbol{H}=0\,.$$

これは，式 (6) を用いると以下のようになる.
外部で $\boldsymbol{H} = 0$ であるから，C_3 に式 (6) の積分形を適用して，
($\boldsymbol{i}_e = 0$)

(9) $$0 = \int_{C_3} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = lH_z(\text{内部})\,.$$

よって，$H_z = 0$.

- 磁場に対するガウスの法則

(10) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

は磁性体中でもそのまま成り立つ.

- $\boldsymbol{i}_e = 0$ の場合

(11) $$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

静電場のときと同様に，

(12) $$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi_M(\boldsymbol{r})\,, \qquad \phi_M(\boldsymbol{r})\text{: 磁気ポテンシャル}$$

と書ける.

磁荷密度 $\rho_M(\boldsymbol{r})$ を

(13) $$\rho_M(\boldsymbol{r}) \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

と定義すれば,

(14) $$\rho_M(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \left[\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\mu_0} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\right] = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \,.$$

(cf. ρ_p, § 2. 1) 式 (12), (13) から,

(15) $$\triangle \phi_M(\boldsymbol{r}) = -\rho_M(\boldsymbol{r}) \,.$$

このポアッソン方程式の解は (§ 1. 7),

(16) $$\phi_M(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_M(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' \,.$$

表面磁荷密度

(17) $$\sigma_M(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(cf. } \sigma_P\text{, § 2. 1)}$$

も考えると，

(18) $$\phi_M(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dS'$$

と書ける．

○ 例 2: 一様に磁化した円柱 (有限の長さ)

$\boldsymbol{M}$ は一定ゆえ，$\rho_M(\boldsymbol{r}) = 0$．一方，

(19) $$\sigma_M = \pm M \quad \left(\begin{array}{c} 上面 \\ 下面 \end{array}\right).$$

よって，

(20) $$\phi_M(\boldsymbol{r}) = \frac{M}{4\pi}\left[\int_{上面} \frac{dS'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} - \int_{下面} \frac{dS'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]$$

従って，$\boldsymbol{H}$ は平行板コンデンサーと類似．$\boldsymbol{B}$ は有限の長さのソレノイドと同様．磁性体円柱の内部では $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ は逆向きになる．

もし，円柱が無限に長ければ，磁荷は無限遠にしかないから $\boldsymbol{H}=0$ となる．(例 1 の結果と一致．) また， $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$ ゆえ，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{M}$．有限の場合，$B_z$ が小さくなる (無限のソレノイドの内部に比べ有限のソレノイドの内部の磁束密度は小さいはず) ので，$H_z=B_z/\mu_0-M<0$ となり，$\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{B}$ の逆向きになる．

- 一様で等方的な磁性体の場合

(21) $$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})=\chi_M\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \chi_M : \underline{\text{磁気感受率 (磁化率)}}$$

と書ける．(χ_M は $\boldsymbol{r}$ には依らないが，$\boldsymbol{H}$ の大きさには依るかもしれない．)

(22) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}))=\mu_0(1+\chi_M)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\,.$$

(23) $$\mu\equiv\mu_0(1+\chi_M)\,, \qquad \underline{\text{透磁率}}$$

を用いると，

(24)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \,.$$

(25)
$$\mu^* \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_M \,, \qquad \underline{\text{比透磁率}}\,.$$

まとめると，静磁場のマクスウェル方程式は,

(26)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \,,$$

(27)
$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}_e(\boldsymbol{r}) \,,$$

(28)
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \,.$$

伝導電流がない場合,

(29)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \,, \quad \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \,, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \,.$$

自由電荷のないときの静電場の方程式は,

(30)
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0 \,, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \,, \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \,.$$

類似性は明白.

● 静磁場の接続条件

静電場のときと同様にして,

$\boldsymbol{B}$ の法線成分は連続. $\boldsymbol{H}$ の法線成分は不連続.

$\boldsymbol{H}$ の接線成分は連続. $\boldsymbol{B}$ の接線成分は不連続.