電磁気学II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題

提出期限: 6月26日の授業中に集める.

1. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ について, $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$ を示せ.

2. 次のような真空中の電磁波を考える.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

   ただし, $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{k}$ は定数ベクトルで, $|\boldsymbol{k}|=\omega/c$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$. これは, $\boldsymbol{k}$ 方向へ進む平面波を表している. ポインティングベクトルを求め, その向きが $\boldsymbol{k}$ の向きであることを確かめよ.

3. $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}$ を示せ.

4. 球対称な系であれば, 静電ポテンシャルは動径 r のみの関数となる. すなわち, $\phi(\boldsymbol{r})=\phi(r),\quad r=|\boldsymbol{r}|$ である.

   (a) このとき,

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right)$$

   であることを示せ. これは球座標でのラプラシアンの表式 (§ 1. 7, 式 (32)) の特別な場合である.

   (b) 上の結果を利用して, 真空中で静電ポテンシャルが $-e^{-r/a}/(\varepsilon_0 r)$ となるような電荷分布を求めよ.

5. 電気双極子 $\boldsymbol{p}_1$ が原点にあり, 電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ が点 $\boldsymbol{r}$ にあるときの, 電気双極子間のエネルギーを求めよ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の向きが, $(\Rightarrow\quad\Rightarrow)$, $(\Rightarrow\quad\Leftarrow)$, $(\Uparrow\quad\Uparrow)$, $(\Uparrow\quad\Downarrow)$ の4つの場合について, 2つ電気双極子間に働く力が引力か斥力か調べよ.

6. 厚さ $2d$ の薄い誘電体の板が一様に法線方向に分極している. 法線を z 軸にとると $\boldsymbol{P}=P\hat{\boldsymbol{z}}$ である. (この分極は外場がなくても存在するものとする. このような分極を永久分極という.)

   (a) この誘電体の分極表面電荷密度, 分極体積電荷密度を求めよ.

   (b) 誘電体内外の $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ を求めよ.

   (c) 誘電体内外の静電ポテンシャルを求めよ.

   (d) この系を平行板コンデンサーと比較せよ.