第1章 真空中の電磁場

1.1　真空中のマクスウェルの方程式

- マクスウェル (Maxwell) の方程式

(1) $$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t)\,,$$

(2) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0\,,$$

(3) $$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)\,,$$

(4) $$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0\,.$$

ただし,

(5) $$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}.$$

(6) $$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\cdots \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A^2 s^2}}{\mathrm{Nm^2}}$$: 真空の誘電率 .

(7) $$\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0} = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A^2}}$$: 真空の透磁率 .

(8) $$c \equiv 2.99792458 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$: 真空中の光速 (厳密な値) .

(9) 電荷密度 ρ の単位 : $$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^3}}\ (\mathrm{C} = \mathrm{As})$$

(10) 電流密度 $\boldsymbol{i}$ の単位 : $$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m^2}}$$

(11) 電場 $\boldsymbol{E}$ の単位 : $$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ \left(\mathrm{V} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}}\right),$$

(12) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位 : $$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}}\ \left(\mathrm{Wb} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{A}} = \mathrm{Vs}\right).$$

● 式 (1): ガウス (Gauss) の法則

(13) 次元： $\nabla \cdot \boldsymbol{D} \to \left[\frac{1}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{Nm}^2}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}\right] = \rho$の次元 .

○ 静電場の場合:

(14) $$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,.$$

領域 V を考えて，V の表面を S とする．

(15) $$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV (= V \text{内の電荷の総量})\,.$$

ガウスの定理を用いると，

(16) $$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})dV = \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

原点に点電荷 q があるとすると，対称性から $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は動径方向を向き、$r = |\boldsymbol{r}|$ だけの関数になる．V を半径 r の球とすれば,

(17) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S E(r) dS = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

よって，クーロン (Coulomb) の法則

(18) $$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,$$

を得る.

- 式 (2): 磁場に対するガウスの法則

右辺=0 $\longrightarrow$ 磁荷 (磁気単極子) が存在しないことを表す.

● 式 (3): アンペール (Ampère)-マクスウェルの法則
次元:

(19)
$$\nabla \times \boldsymbol{H} \to \left[\frac{1}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right] = \boldsymbol{i}\text{の次元}\,,$$

(20)
$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \to \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{Nm}^2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right] = \boldsymbol{i}\text{の次元}\,.$$

○ 定常的な場合.

(21)
$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,.$$

閉曲線 C に囲まれた曲面 S を考えると,

(22)
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

右辺の積分は面 S を通る電流 I. ストークス (Stokes) の定理を用いると，左辺は,

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}\,. \tag{23}$$

すなわち，

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I\,. \quad \text{(アンペールの法則)} \tag{24}$$

無限に長い直線電流を考えると，$|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})|(\equiv B)$ は電流からの距離 d だけの関数となり，その向きは直線電流を中心軸とする円の円周方向 (右ねじの方向) となる．従って，C として直線電流を中心軸とする半径 d の円を考えれば，

$$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = B(d) \oint_C dr = 2\pi d B(d)\,. \tag{25}$$

よって，

$$B(d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\,. \tag{26}$$

○ 定常的でない場合.

(27) $$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} : \quad \text{変位電流の存在.}$$

その意味は後で.

● 式 (4): ファラデー (Faraday) の電磁誘導の法則

○ 定常的な場合.

(28) $$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

(29) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})\,, \quad \phi(\boldsymbol{r}) : \text{静電ポテンシャル (電位).}$$

と書ける．($\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラー量で，単位は V．)
実際，式 (29)$\to$ 式 (28)：

(30) $$(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi = 0\,.$$

他の成分も同様.

逆に，式 (28)$\longrightarrow$ 式 (29)：
2 点 A，B を考え，A から B に到る 2 つの曲線 C_1，C_2 を考える．このとき，$C = C_1 - C_2$ は閉曲線となる．C に囲まれた面を S とすると，

(31) $$0 = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \,.$$

すなわち，

(32) $$\int_{C_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

となり，$\int_A^B \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ は経路に依らない．(両端の点のみに依る．)

(33) $$\int_A^B \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}' = -\phi(B) + \phi(A)$$

点 A の座標を $\boldsymbol{r}$，点 B の座標を $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ とすると，

(34)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -d\phi(\boldsymbol{r})\,.$$

成分で書くと，

(35)
$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial \phi}{\partial x}dx - \frac{\partial \phi}{\partial y}dy - \frac{\partial \phi}{\partial z}dz\,.$$

よって，式 (29) を得る．

○ 定常的でない場合．

固定された (時間に依らない) 閉曲線 C で囲まれた面 S を考える．

(36)
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = 0\,.$$

ストークスの定理を用いて，

(37) $$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = 0\,.$$

第 1 項は回路 C に生じる起電力 ϕ_{em}. 第 2 項の積分は, S を貫く磁束 Φ. 従って, ファラデーの電磁誘導の法則

(38) $$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

を得る. (注：回路が運動している場合にもこの式は成り立つ.)

- ローレンツ (Lorentz) 力：電磁場中の点電荷 q に働く力.

(39) $\boldsymbol{F} = q\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right]$, $\boldsymbol{r} =$ 電荷の座標 , $t =$ 時間 .

電荷の速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する部分は仕事をしないことに注意.