1.3　点電荷と電磁場から成る系

- 物質の微視的 (ミクロな) 描像

巨視的 (マクロな) 物質 $\rightarrow$ 分子 $\rightarrow$ 原子 $\rightarrow$ 原子核・電子

- 原子の大きさ: 水素原子のボーア半径 $\sim 10^{-10}\mathrm{m}$
- 原子核の大きさ: 水素原子核 (陽子)$\sim 10^{-15}\mathrm{m}$
- 電子の大きさ $\sim 10^{-13}\mathrm{m}$

$\Longrightarrow$ 原子核，電子を点電荷とみなし，物質を点電荷の集合体として扱うモデルを考える.
(古典電磁気学の範囲ではこれでよいが，物質の様々な性質は量子力学によって支配されている．)

● 点電荷の数学的表現

点電荷: 空間の 1 点 $\boldsymbol{a}$ に (有限の) 電荷 q が集中している.

(1)
$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \infty\,, & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,, \\ 0\,, & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{a}\,. \end{cases}$$

○ ディラック (Dirac) の δ(デルタ) 関数

1 次元の場合:

(2)
$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty\,, & x = a\,, \\ 0\,, & x \neq a\,. \end{cases}$$

(3)
$$\delta(x) = \delta(-x)\,.$$

(4)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1\,.$$

(5)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,dx = f(a)\,. \quad (f\ \text{は}\ a\ \text{で連続とする})$$

○ 例:

(6)
$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x < -\frac{1}{2n} \\ n\,, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}\,, \\ 0\,, & x > \frac{1}{2n}\,. \end{cases}$$

$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$ となる．実際,

(7)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n f(x)\, dx$$
$$= \quad f(0) \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\, dx = f(0)\,.$$

3 次元の場合:

(8)
$$\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \delta(x - a_x)\delta(y - a_y)\delta(z - a_z)\,.$$

○ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$ にある点電荷 q の電荷密度は,

(9) $$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,,$$

と書ける．今，点電荷 q が運動しているとして，その座標を $\boldsymbol{x}(t)$ と書くと,

(10) $$\rho(\boldsymbol{r}, t) = q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t))\,.$$

電流密度は,

(11) $$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) = q\dot{\boldsymbol{x}}(t)\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t))\,, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\,.$$

電荷保存則，式 (1. 2. 3) は

(12)
$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) \\
= \;& q\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \nabla_r \, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)) + q\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)) \\
= \;& -q\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \nabla_x \, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)) + q\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \nabla_x \, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t)) = 0 \,,
\end{aligned}
$$

確かに満されている.

- N 個の点電荷 q_i(質量 m_i, 座標 $\boldsymbol{x}_i(t)$) と電磁場からなる系を記述する方程式は, ($i = 1, \cdots, N$ として)

(13) $$m_i \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{x}_i(t) = q_i \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i(t), t) + \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i(t), t) \right] ,$$

(14) $$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i q_i \, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) ,$$

(15) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 ,$$

(16) $$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \sum_i q_i \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) \, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) ,$$

(17) $$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0 .$$

巨視的な系では $N \sim O(10^{23})$.
式 (13)∼(17) を解くのは事実上不可能.
$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ が与えられて，式 (13) を解く． $\Leftarrow$ 力学の問題
$\rho, \boldsymbol{i}$ が与えられて，式 (14)∼(17) を解く． $\Leftarrow$ 電磁気学の問題

式 (13)∼(17) を解かなくても分かることもある.