1.4 エネルギー保存則

● 閉曲面 S に囲まれた領域 V 内で点電荷が運動しているとする．式 (1. 3. 13) は,

(1) $$m_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_i(t) = \int_V dV q_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v}_i(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right] .$$

ただし，$\boldsymbol{v}_i(t) = d\boldsymbol{x}_i(t)/dt$．$\sum_i \boldsymbol{v}_i(t) \cdot$ (1) を考えると,

(2) $$\begin{aligned} & \sum_i m_i \boldsymbol{v_i}(t) \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_i(t) \\ = & \sum_i \int_V dV\, q_i\, \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) \\ & \times \left[\boldsymbol{v_i}(t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v_i}(t) \cdot \boldsymbol{v}_i(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right] . \end{aligned}$$

右辺第 2 項がゼロになることに注意して，式 (1. 3. 16) を用いると,

(3)
$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i \boldsymbol{v_i}^2(t)\right)$$
$$= \sum_i \int_V dV\, q_i\, \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_i(t))\, \boldsymbol{v_i}(t)\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
$$= \int_V dV \left(\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

(4)
$$w(\boldsymbol{r},t) \equiv \frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\}\,.$$

(5)
$$\frac{\partial}{\partial t}w(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}$$

(式 (1. 3. 17) を使った．)

式 (5) を式 (3) に代入して,

(6)
$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i \boldsymbol{v_i}^2(t)\right)$$
$$= \int_V dV\left[-\frac{\partial w}{\partial t} - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\right].$$

一方,

(7)
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}.$$

(各自で確かめよ．) よって，式 (6) は,

(8)
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i \boldsymbol{v_i}^2(t) + \int_V dV\, w(\boldsymbol{r},t)\right] = -\int_V dV\,\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

$W(t) \equiv \int_V dV\, w(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ と書くと,

(9)
$$-\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v_i}^2(t) + W(t)\right] = \int_V dV\, \nabla \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$$
$$(\text{ガウスの定理} \rightarrow) = \int_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

(10)
$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v_i}^2(t) = V\ \text{内の点電荷の運動エネルギー}\,.$$

(11)
$$\begin{aligned} W(t) &= \int_V dV\, w(\boldsymbol{r},t) \\ &= \int_V dV\, \frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\} \\ &= V\ \text{内の}\ \underline{\text{電磁場のエネルギー}} \end{aligned}$$

($w(\boldsymbol{r},t)$ は電磁場のエネルギー密度．)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} &= \text{電場のエネルギー密度}\,, \\
\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} &= \text{磁場のエネルギー密度}\,.
\end{aligned}
$$

式 (9) は エネルギー保存則 を表している.
式 (9) の左辺は単位時間あたりの V 内の全エネルギーの減少量を表している．式 (9) の右辺は V の表面，すなわち S を通って単位時間に出ていくエネルギーを表す．(点電荷は V から出ていかないものとする．)

(12)
$$
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)
$$

を，ポインティング (Poynting) ベクトル と呼ぶ．これは，単位時間に単位面積を通って出ていくエネルギーの流れを表す.

(13)
$$
\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \text{ の次元}: \quad \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\right] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{sm}^2}\right]\,.
$$

注: $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \neq 0$ のとき，必ずエネルギーの流れがあるとは限らない．$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ の面積分 $\int_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}$ を見なければならない.
例: 静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ がある場合.
一般には,

(14) $$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \neq 0\,.$$

しかし,

(15) $$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,dV \\ &= \int_V (\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H})\,dV = 0\end{aligned}$$

(定常的で，V 内に電流もないとすれば $\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{H} = 0$．)
V からエネルギーは出ていっていない.

○ 十分遠方では電磁場が速やかにゼロになるような場合.
V を十分大きくとると, $\int_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}=0$ となるから, 式 (9) は

(16) $$\frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i \boldsymbol{v_i}^2(t)+W(t)\right]=0$$

となる. これは,

(17) $$\sum_i \frac{1}{2}m_i \boldsymbol{v_i}^2(t)+W(t)$$

が保存量であることを表している. 第 1 項は点電荷の運動エネルギーだから, 第 2 項が電磁場のエネルギーと考えれば, 式 (16) はエネルギー保存則を表すことになる.

● 静電場のエネルギー

(18)
$$W = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\,dV\,.$$

(19)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})) &= (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) + \phi(\boldsymbol{r})\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \\ &= -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) + \phi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

を用いて,

(20)
$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV - \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot(\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}))\,dV \\ &= \frac{1}{2}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV - \frac{1}{2}\int_S \phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

電荷が有限の範囲に分布しているとすると，遠方で ($|\boldsymbol{r}| \to \infty$)

(21) $$\phi(\boldsymbol{r}) \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}, \quad |\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})| \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

となる．表面積は $\sim |\boldsymbol{r}|^2$ 程度だから，V を十分大きくとれば式 (20) の右辺第 2 項の表面積分はゼロになる．よって，

(22) $$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV\,, \quad \underline{\text{静電場のエネルギー}}.$$

○ 例題 1: 座標 $\boldsymbol{x}_i$ にある点電荷 q_i.（$i = 1, \cdots, N$)

(23) $$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i)\,, \quad \phi(\boldsymbol{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i|}\,.$$

$$
(24)\quad W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int q_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_i)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_j|}\,dV = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|}\,.
$$

$N=2$ の場合,

$$
(25)\quad W=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}+\frac{q_2q_1}{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}\,.
$$

(各項の意味，1/2 がついている理由を考えよ．)
確かに 2 つの点電荷の間のポテンシャルエネルギーになっている.

この系のエネルギーは無限に離れた q_1, q_2 を距離 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$ まで近づけるのに必要な仕事.

(26) $$W = -\int_{\infty}^{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|} F(x)dx = -\int_{\infty}^{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}\,.$$ (式 (25) と一致.)

○ 例題 2: 一様に帯電した半径 a の球 (中心を原点とする．)

(27) $$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\,, & r < a\,, \\ 0\,, & r > a\,. \end{cases}$$

系の対称性から $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r =$ 動径方向の単位ベクトル．ガウスの法則から (式 (1. 1. 15, 16) 参照), 半径 r の球面を考えて,

(28) $$\int_{\text{球面}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{球}} \rho(r')\,dV'\,.$$

(29) $$左辺 = E(r)\int dS = 4\pi r^2 E(r)\,.$$

(30) $$右辺 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r')\,4\pi r'^2 dr' = \begin{cases} Q/\varepsilon_0\,, & r > a\,, \\ Q(r)/\varepsilon_0\,, & r < a\,. \end{cases}$$

ただし，$Q \equiv \int_0^a \rho(r')4\pi r'^2 dr' = 4\pi a^3 \rho_0/3$ (全電荷),
$Q(r) \equiv (r/a)^3 Q$ (半径 $r(< a)$ 内の電荷).
よって,

(31) $$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, & r > a\,, \\[2ex] \dfrac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, & r < a\,. \end{cases}$$

(図に書いてみよ．)

エネルギーは,

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})\,dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^\infty E^2(r)\,4\pi r^2 dr \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^6 \frac{1}{r^4}\,4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4}\,4\pi r^2 dr\right] \\
&= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.
\end{aligned} \tag{32}
$$

全電荷 Q を一定に保って $a \to 0$ とすると (点電荷の極限), $W \to \infty$ となる. (cf. 例題 1)