電磁気学II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題 略解

1. $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ などと置いて，成分で計算すればよい．

2. $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}_0 \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) \sin^2(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})/(\mu_0 \omega)$ となるが，公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$ を用いれば，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}|\boldsymbol{E}_0|^2 \sin^2(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})/(\mu_0 \omega)$ となる．

3. 略.

4. 両辺の成分が等しいことを示せばよい．(1 つの成分，例えば z 成分を示せば十分．) なお，左辺は，$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$ の意.

5. (a) $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ から

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(R) = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{d}{dR}\phi(R) = \frac{x}{R}\frac{d}{dR}\phi(R)\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(R) = \frac{R^2 - x^2}{R^3}\frac{d}{dR}\phi(R) + \frac{x^2}{R^2}\frac{d^2}{dR^2}\phi(R)\,.$$

y 微分についても同様．また，

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(R) = 0\,.$$

これらを

$$\triangle\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

に代入すればよい.

(b)

$$\phi(R) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(R^2 - a^2) \quad (R < a)\,, \qquad \phi(R) = -\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\log\frac{R}{a} \quad (R > a)\,.$$

(c) 円柱座標では，

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

であるから，

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi(R) = -\hat{\boldsymbol{R}}\frac{d}{dR}\phi(R) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R\hat{\boldsymbol{R}}, & (R < a) \\ \dfrac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R}, & (R < a) \end{cases}$$

となる.