電磁気学II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題2 略解

1. (a)

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \, .$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & (r < a, \, r > b) \, , \\[2ex] \dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & (a < r < b) \, . \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \begin{cases} 0 & (r < a, \, r > b) \, , \\ \left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & (a < r < b) \, . \end{cases}$$

   (b) $r = a$ では，分極表面電荷密度は $\sigma_p(a) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = -(1-\varepsilon_0/\varepsilon)Q/(4\pi a^2)$. $r = b$ では，$\sigma_p(b) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = (1-\varepsilon_0/\varepsilon)Q/(4\pi b^2)$. 分極電荷の総和は，$\int_{r=a} \sigma_p \, dS + \int_{r=b} \sigma_p \, dS = 4\pi a^2 \sigma_p(a) + 4\pi b^2 \sigma_p(b) = 0$.

2. $\boldsymbol{E}$ の接線成分は連続ゆえ，左半分と右半分で $\boldsymbol{E}$ は等しい．電位差を V とすると，$E = V/d$. $\varepsilon_i \, (i = 1, 2)$ の領域で $D_i = \varepsilon_i E = \varepsilon_i V/d$. 極板の電荷密度は $\sigma_i = D_i = \varepsilon_i V/d$. 電荷は $Q = lw\sigma_1 + lw\sigma_2 = lw(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V/d$ ゆえ，$C = Q/V = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)lw/d$.

3. 極板間の距離を拡げる前と後で極板の電荷は変化しない．極板間の距離を拡げる前と後の容量と電位差をそれぞれ，C_1, V_1, C_2, V_2 と書くと，$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$. 極板の面積を A とすると，$C_1 = \varepsilon A/d_1$，$C_2 = A/[d_1/\varepsilon + (d_2 - d_1)/\varepsilon_0]$. よって，

$$V_2 = \frac{C_1}{C_2} V_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{d_2 - d_1}{d_1}\right) V_1 \, .$$

4. 地球の半径を R, 磁気双極子モーメントの大きさを m とすれば, 極点では、$B = \mu_0 m/(2\pi R^3)$. $R \simeq 6400\text{km}$ として，$m \simeq 8 \times 10^{22} \, \mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$. 赤道上では，$B = B(\text{極点})/2 \simeq 0.3\text{G}$.

5. (a) $\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} = M\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{r}} = M \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

   (b) $\boldsymbol{\sigma}_m$ が作る磁気双極子モーメントは,

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int_{r=a} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_m \, dS = \frac{1}{2} aM \int_{r=a} \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} \sin\theta \, dS = -\frac{1}{2} aM \int_{r=a} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \, dS \, .$$

   $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta$, $dS = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ を用いて,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= -\frac{1}{2} a^3 M \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, (\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta) \sin^2\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 M \hat{\boldsymbol{z}} \, . \end{aligned}$$