1.5 運動量保存則

- 式 (1. 4. 1) を全ての点電荷について和をとる.

(1)
$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i(t)}{dt}$$
$$= \sum_i \int_V dV q_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}_i(t)) \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v}_i(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\right] .$$

式 (1. 3. 14) と式 (1. 3. 16) を用いて, q_i, $q_i \boldsymbol{v}_i(t)$ を消去すると,

(2)
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i(t)\right] = \int_V dV \Big[(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t))\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$$
$$+ \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \Big] .$$

左辺の $[\cdots]$ は全点電荷の運動量.

(3)
$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\,,$$

を用いると,

(4)
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i(t)+\int_V dV\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right] = \int_V dV\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t))\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]\,.$$

(注：$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}/c^2$.)

● 式 (4) の右辺の意味

(5)
$$\begin{pmatrix} T^e_{xx} & T^e_{xy} & T^e_{xz} \\ T^e_{yx} & T^e_{yy} & T^e_{yz} \\ T^e_{zx} & T^e_{zy} & T^e_{zz} \end{pmatrix}$$
$$\equiv \quad \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix} .$$

と定義する．すなわち，

(6) $$T^e_{ij}(\boldsymbol{r},t) \equiv \varepsilon_0 \left\{ E_i(\boldsymbol{r},t)E_j(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t) \right\}, \ i,j = x,y,z\,.$$

同様に，

(7) $$T^m_{ij}(\boldsymbol{r},t) \equiv \frac{1}{\mu_0} \left\{ B_i(\boldsymbol{r},t)B_j(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r},t) \right\} .$$

(8) $$T_{ij}(\boldsymbol{r},t) \equiv T^e_{ij}(\boldsymbol{r},t) + T^m_{ij}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

これを マクスウェルの応力テンソル と呼ぶ.

(9) $$\boldsymbol{T}_i \equiv \begin{pmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ T_{zi} \end{pmatrix}$$

と定義して，($\boldsymbol{T}^e_i$，$\boldsymbol{T}^m_i$ も同様)

(10) $$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}_i = \frac{\partial T_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zi}}{\partial z}$$

を考える.

$$
(11)\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}^e_x = \frac{\partial T^e_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T^e_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial T^e_{zx}}{\partial z}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_0\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{\partial}{\partial y}(E_yE_x)+\frac{\partial}{\partial z}(E_zE_x)\right]\\
&= \varepsilon_0\left[E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}-E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}-E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial E_y}{\partial y}E_x+E_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}E_x+E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]\\
&= \varepsilon_0\left[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})E_x-\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)E_y+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)E_z\right]\\
&= \varepsilon_0\left[E_x(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-E_y(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})_z+E_z(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})_y\right]\\
&= \varepsilon_0\left[E_x(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}))_x\right].
\end{aligned}
$$

他の成分も同様.

よって，$\boldsymbol{T}^e = (\boldsymbol{T}^e_x, \boldsymbol{T}^e_y, \boldsymbol{T}^e_z)$ と書けば，

(12)
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}^e = \varepsilon_0 \left[\boldsymbol{E}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \right] .$$

同様に，

(13)
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}^m = \frac{1}{\mu_0} \left[\boldsymbol{B}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} \right] = -\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} .$$

式 (4) は，($\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{T}^e + \boldsymbol{T}^m$)

(14)
$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i(t) + \frac{1}{c^2} \int_V dV\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) \right] = \int_V dV\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}, t) = \int_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} .$$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S}$ は微小面要素 $d\boldsymbol{S}$ に外部から加わる電磁気的な力と考えられる．

もし系が閉じていて外部から力が加わらなければ,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i(t) + \frac{1}{c^2}\int_V dV\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\right] = 0\,. \tag{15}$$

第 2 項を V 内の電磁場の運動量と考えれば，これは運動量保存則を表す．($[\cdots]$ 内の第 2 項が運動量の次元を持つことを確かめよ．)