電磁気学 II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題 略解

1. $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$ などと置いて，成分で計算すればよい．

2. $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}_0\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)\sin^2(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})/(\mu_0\omega)$ となるが，公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$ を用いれば，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{k}|\boldsymbol{E}_0|^2\sin^2(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})/(\mu_0\omega)$ となる．

3. 地表面の微小円柱 (底面積 δS) にガウスの法則を適用して，$-E\delta S=\sigma\delta S/\varepsilon_0$．よって表面電荷密度 $\sigma=-\varepsilon_0 E$．地球の半径を R として，$Q=-4\pi R^2\varepsilon_0 E\simeq-4.6\times10^5$ C．エネルギーは，$W=(1/2)\int\rho\phi\,dV$ で，導体は等電位であることから，地球の電位を ϕ_0 とすると，$W=(1/2)\phi_0\int\rho\,dV=\phi_0 Q/2$. 地球外のポテンシャルは，地球の中心におかれた点電荷 Q の作るポテンシャルに等しいから，$\phi_0=Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$．よって，$W=2\pi\varepsilon_0 R^3E^2\simeq 1.5\times10^{14}$ J.

4. (a) $R=\sqrt{x^2+y^2}$ から

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(R)=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{d}{dR}\phi(R)=\frac{x}{R}\frac{d}{dR}\phi(R)\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(R)=\frac{R^2-x^2}{R^3}\frac{d}{dR}\phi(R)+\frac{x^2}{R^2}\frac{d^2}{dR^2}\phi(R)\,.$$

y 微分についても同様．また，

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(R)=0\,.$$

これらを

$$\triangle\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

に代入すればよい．

(b)

$$\phi(R)=-\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(R^2-a^2)\quad(R<a)\,,\qquad \phi(R)=-\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\log\frac{R}{a}\quad(R>a)\,.$$

(c) 円柱座標では，

$$\boldsymbol{\nabla}=\hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial R}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

であるから，

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi(R)=-\hat{\boldsymbol{R}}\frac{d}{dR}\phi(R)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R\hat{\boldsymbol{R}}, & (R<a)\\ \dfrac{\rho_0a^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R}, & (R<a)\end{cases}$$

となる．

5. $\boldsymbol{p}_1$ が作る電場は，

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{p}_1}{r^5}\,.$$

エネルギーは,

$$W = -\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^2 \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 - 3(\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p_2} \cdot \boldsymbol{r})}{r^5}\,.$$

$(\Rightarrow \quad \Rightarrow)$ のとき，$\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_1 p_2$, $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r} = p_1 r$, $\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{r} = p_2 r$ より，$W = -p_1 p_2/(2\pi\varepsilon_0 r^3)$. $F = -\frac{dW}{dr} < 0$ となるので，引力．同様にして，$(\Rightarrow \quad \Leftarrow)$ のとき斥力, $(\Uparrow \quad \Uparrow)$ のとき斥力, $(\Uparrow \quad \Downarrow)$ のとき引力.