電磁気学II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題2 略解

1. 両辺の成分が等しいことを示せばよい．(1つの成分，例えば z 成分を示せば十分．)

2. (a) $\sigma_P = \boldsymbol{P}\cdot(\pm\hat{\boldsymbol{z}}) = \pm P$ (上面/下面). $\rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = 0$ (境界面を除く．)

   (b) 全空間で $\rho_f = 0$ ゆえ，全空間で $\boldsymbol{D} = 0$．誘電体の外では $0 = \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ ゆえ，$\boldsymbol{E} = 0$. 誘電体の内では $0 = \boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ より，$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{P}/\varepsilon_0 = -P\hat{\boldsymbol{z}}/\varepsilon_0$.

   (c) 誘電体の z 方向の中心を $z = 0$ とする．静電ポテンシャルは z のみの関数 $\phi(z)$ となる．$E_z = -d\phi/dz$ より，

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{P}{\varepsilon_0} \quad (|z| < d), \qquad \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad (|z| > d).$$

   $|z| < d$ で $\phi(z) = Pz/\varepsilon_0 + c_1$．$\phi(0) = 0$ として，$\phi(z) = Pz/\varepsilon_0$ $(|z| < d)$．$z > d$ で $\phi(z) = c_2$，$z < -d$ で $\phi(z) = c_3$．$z = \pm d$ での ϕ の連続性より，$c_2 = Pd/\varepsilon_0 = -c_3$.

   (d) 極板に電荷密度 $\sigma = \pm P$ を与えた極板間が真空で距離 $2d$ の平行板コンデンサーと同じ．

3. 極板間の距離を拡げる前と後で極板の電荷は変化しない．極板間の距離を拡げる前と後の容量と電位差をそれぞれ，C_1, V_1, C_2, V_2 と書くと，$Q = C_1V_1 = C_2V_2$．極板の面積を A とすると，$C_1 = \varepsilon A/d_1$，$C_2 = A/[d_1/\varepsilon + (d_2 - d_1)/\varepsilon_0]$．よって，

$$V_2 = \frac{C_1}{C_2}V_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{d_2 - d_1}{d_1}\right)V_1\,.$$

4. (a) $M_r = M_z = 0$, $M_\varphi = M_0 b/r$ ゆえ，

$$\boldsymbol{i}_m = \nabla\times\boldsymbol{M} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_\varphi) = 0\,.$$

   (b) $r = a$ では，$\boldsymbol{n}_a$ を内側の面の単位法線ベクトルとして，$\boldsymbol{\sigma}_m(a) = \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}_a = (M_0 b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$. $r = b$ では，$\boldsymbol{n}_b$ を外側の面の単位法線ベクトルとして，$\boldsymbol{\sigma}_m(b) = \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}_b = -M_0\hat{\boldsymbol{z}}$.

   (c) 対称性から，$B_r = B_z = 0$．積分形のアンペールの法則 (式 (1.1.24)) より，$r < a$ として，$2\pi rB_\varphi = 0$．よって，$\boldsymbol{B} = 0$.

   (d) 上と同様にして，$r > b$ として，$2\pi rB_\varphi = 2\pi a\,(\boldsymbol{\sigma}_m(a))_z + 2\pi b\,(\boldsymbol{\sigma}_m(b))_z = 2\pi bM_0 - 2\pi bM_0 = 0$．よって，$\boldsymbol{B} = 0$.