電磁気学II(共通教育、田中担当クラス) レポート問題

提出期限: 6月22日の授業中に集める.

1. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ について, $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$ を示せ.

2. 次のような真空中の電磁波を考える.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t).$$

   ただし, $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{k}$ は定数ベクトルで, $|\boldsymbol{k}|=\omega/c$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0$. これは, $\boldsymbol{k}$ 方向へ進む平面波を表している. ポインティングベクトルを求め, その向きが $\boldsymbol{k}$ の向きであることを確かめよ.

3. 大気中には, 地表近くに下向きの電場 $E\simeq 100\mathrm{V/m}$ が存在する. 地球自体は導体であると考え, 地球は等ポテンシャル球であるとして, 地表の全電荷を求めよ. さらに, この電荷による静電エネルギーを求めよ. (真空中の誘電率 ε_0 を用いよ.)

4. 軸対称な電荷分布であれば, 静電ポテンシャルは軸からの距離 R のみの関数となる. すなわち, z 軸を対称軸とすれば, $\phi(\boldsymbol{r})=\phi(R)$, $\quad R=\sqrt{x^2+y^2}$ である.

   (a) このとき,

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{R}\frac{d}{dR}R\frac{d}{dR}\phi(R)$$

   であることを示せ. これは円柱座標でのラプラシアンの表式 (§ 1. 7, 式 (18)) の特別な場合である.

   (b) z 軸を中心軸とする半径 a の無限に長い円柱が, 一定の (体積) 電荷密度 ρ_0 で帯電している. すなわち, 電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\rho_0, & R<a,\\ 0, & R>a.\end{cases}$$

   上の結果を利用し, ポアッソン方程式を解くことにより, 静電ポテンシャルを求めよ. ただし, $\phi(a)=0$, $\phi(0)$ は有限, $d\phi/dR$ は $R=a$ で連続とする.

   (c) 上で求めた静電ポテンシャルに対応する電場を求めよ.

5. 電気双極子 $\boldsymbol{p}_1$ が原点にあり, 電気双極子 $\boldsymbol{p}_2$ が点 $\boldsymbol{r}$ にあるときの, 電気双極子間のエネルギーを求めよ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の向きが, $(\Rightarrow\quad\Rightarrow)$, $(\Rightarrow\quad\Leftarrow)$, $(\Uparrow\quad\Uparrow)$, $(\Uparrow\quad\Downarrow)$ の 4 つの場合について, 2 つ電気双極子間に働く力が引力か斥力か調べよ.