1.6 電磁ポテンシャル

(1) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

と置くと，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$ は自動的に満たされる．(各自確かめよ．) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を <u>ベクトルポテンシャル</u> と呼ぶ．(単位: Wb/m．)
逆に $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$ なら $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ と書ける．例えば，(具体的に積分して)

(2) $$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \hat{\boldsymbol{y}} \int_{x_0}^{x} B_z(x', y, z, t) dx' \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{z}} \left[\int_{y_0}^{y} B_x(x_0, y', z, t) dy' - \int_{x_0}^{x} B_y(x', y, z, t) dx' \right] \end{aligned}$$

と書くことができる．($\hat{\boldsymbol{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトル．$\hat{\boldsymbol{y}}$ も同様．)

(3) $$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0$$

を用いると,

(4) $$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)=0\,.$$

式 (1. 1. 28)，式 (1. 1. 29) に関する議論と同様にして,

(5) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t)$$

と書ける．$\phi(\boldsymbol{r},t)$ は <u>スカラーポテンシャル</u> で単位は V.
まとめると,

(6) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\,,$$

(7) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

ϕ, $\boldsymbol{A}$ を電磁ポテンシャルという.

- 電磁ポテンシャルを決定する方程式 (定常的な場合)

(8) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) ,$$

(9) $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) .$$

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$ より,

(10) $$-\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} .$$

(11) $\triangle \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ ラプラシアン (Laplacian)

を導入すれば,

(12) $$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} .$$

一方, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ より,

(13) $$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) .$$

(14) $$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - \triangle \boldsymbol{A}$$

を用いて，(各自で確かめよ)

(15) $$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) - \triangle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \,.$$

ここで次のような変換 (ゲージ変換) を考える．

(16) $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{r})$$

($u(\boldsymbol{r})$ は微分可能な任意のスカラー関数．) このとき，

(17) $$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \,. \end{aligned}$$

すなわち，$\boldsymbol{B}$ を与えても $\boldsymbol{A}$ は一意的には決まらず，上の変換の自由度が残る．
今，式 (15) の 1 つの解を $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})$ とする．

(18) $$\triangle\chi(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = 0$$

であるような $\chi(\boldsymbol{r})$ を用いて，式 (16) の変換を行なう.

(19) $$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{r})\,.$$

すると,

(20) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_0 + \triangle\chi = 0\,.$$

$\boldsymbol{A}_c$ も式 (15) を満すから，式 (15) は,

(21) $$\triangle\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}_c = 0\,.$$

以下，$\boldsymbol{A}_c$ の添字 $_c$ を省く.

まとめると,

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \tag{22}$$

$$\triangle\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\,, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0\,. \tag{23}$$

$\phi(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の (デカルト座標での) 各成分は，同じ形の方程式, ポアッソン (Poisson) 方程式 を満す.