1.7　静電場とポアッソン方程式

(1)
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,,$$

(2)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})\,.$$

静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は式 (1) を適当な境界条件のもとで解くことによって決定され，静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は式 (2) から求る．
特に電荷がないところ ($\rho(\boldsymbol{r}) = 0$) では,

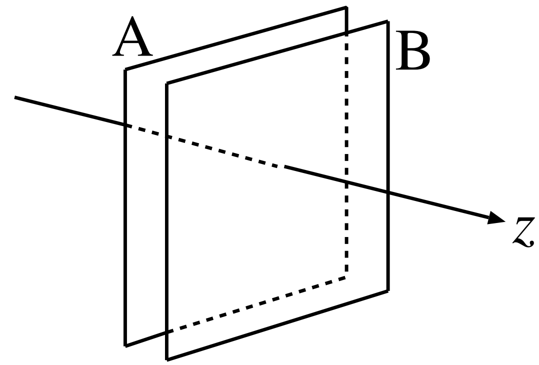
(3)
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad \text{ラプラス (Laplace) 方程式}\,.$$

- デカルト (カーテシアン) 座標では,

(4)
$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

○ 例題 1: 無限に広い平行板コンデンサー

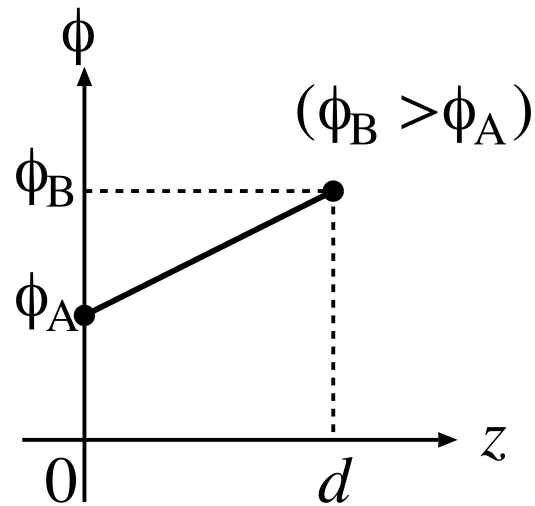
真空中に 2 枚の無限に広い導体の板 A，B が距離 d だけ離れて平行に置かれている．導体の法線を z 軸にとり，$z=0$ が板 A，$z=d$ が板 B であるとする．A の電位を ϕ_A，B の電位を ϕ_B として，AB 間の電場を求める．



$\phi(\boldsymbol{r})$ は z のみの関数ゆえ $\phi(\boldsymbol{r})=\phi(z)$ と書く．AB 間に電荷は無いから，式 (1) より，

(5)
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z)=0\,.$$

解は，c_0，c_1 を定数として，



(6)
$$\phi(z)=c_0+c_1 z\,.$$

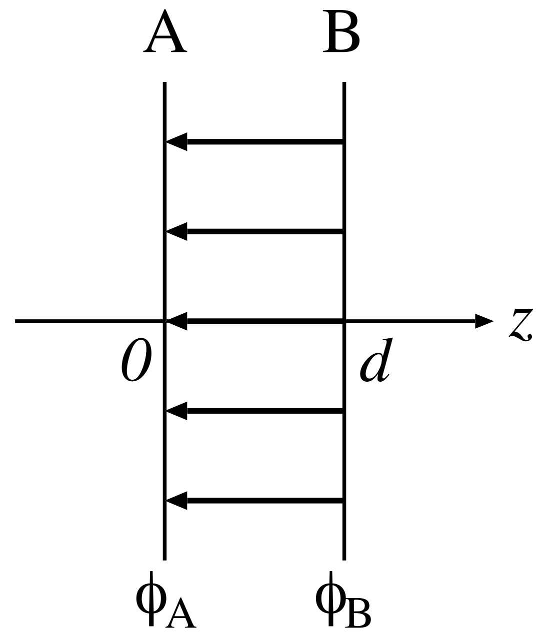
境界条件 $\phi(0)=\phi_A$，$\phi(d)=\phi_B$ より，

(7)
$$\phi(z)=\phi_A+\frac{\phi_B-\phi_A}{d}z\,.$$

式 (2) より，電位差 $V \equiv \phi_B - \phi_A$ を用いると，

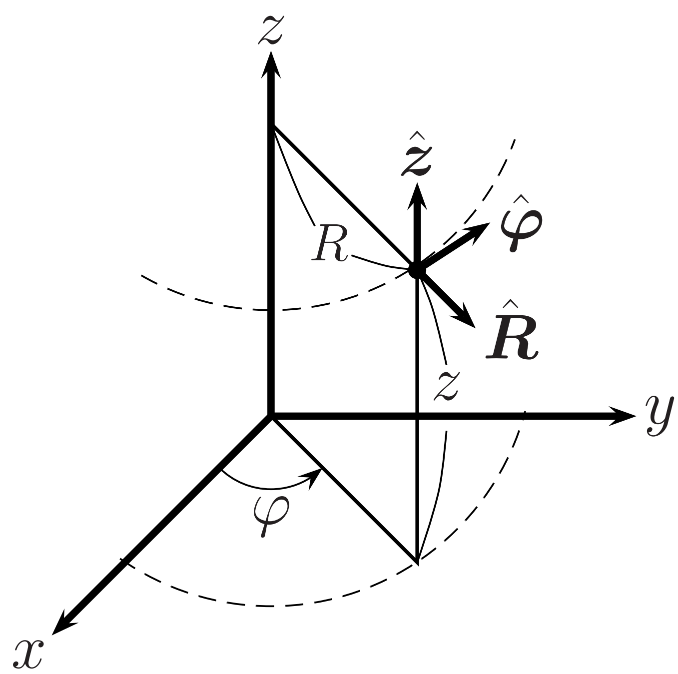
(8) $$E_z(z) = -\frac{V}{d}\,,\ E_x = E_y = 0\,.$$

すなわち，($V > 0$ として) 電場は z 軸の負の方向を向き，一定である．



- 円柱 (円筒) 座標 (R, φ, z):

(9) $x = R\cos\varphi\,,\ y = R\sin\varphi\,,\ z = z\,.$



円柱座標の (直交) 基底ベクトルは,
$\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ で,

(10)
$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{R}} &= \hat{\boldsymbol{x}}\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\varphi\,, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\,, \\ \hat{\boldsymbol{z}} &= \hat{\boldsymbol{z}}\,. \end{aligned}$$

微小な変位を表すベクトル (線要素) は,

(11)
$$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{R}}dR + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,R\,d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}dz\,.$$

微小な体積 (体積要素) は,

(12)
$$dV = R\,dR\,d\varphi\,dz\,.$$

関数 f の全微分は,

(13) $$df = \frac{\partial f}{\partial R}dR + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz\,.$$

(14) $$df = d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, dR + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, R\, d\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, dz$$

と比較して,

(15) $$\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R}\,,\quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,,\quad \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

つまり，円柱座標 (R, φ, z) では,

(16) $$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial R}\,, \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,, \frac{\partial}{\partial z}) = \hat{\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

ラプラシアンは,

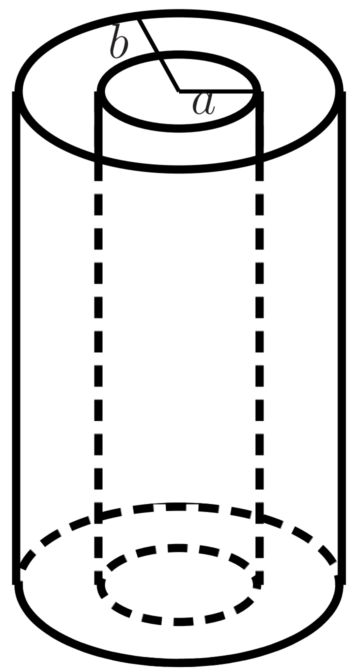
$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{R}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \qquad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{R}} \tag{17}$$

に注意して,

$$\triangle = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{18}$$

○ 例題 2: 半径 a, b ($a < b$) の無限に長い同軸導体円筒

中心軸を z 軸とする円柱座標で考える．対称性から，$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(R)$．電位差を $\phi(b) - \phi(a) = V$ とする．



式 (3) は，式 (18) から,

$$\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial}{\partial R}\phi(R) = 0\,. \tag{19}$$

解は,

(20) $$\phi(R) = c_0 + c_1 \log R\,.$$

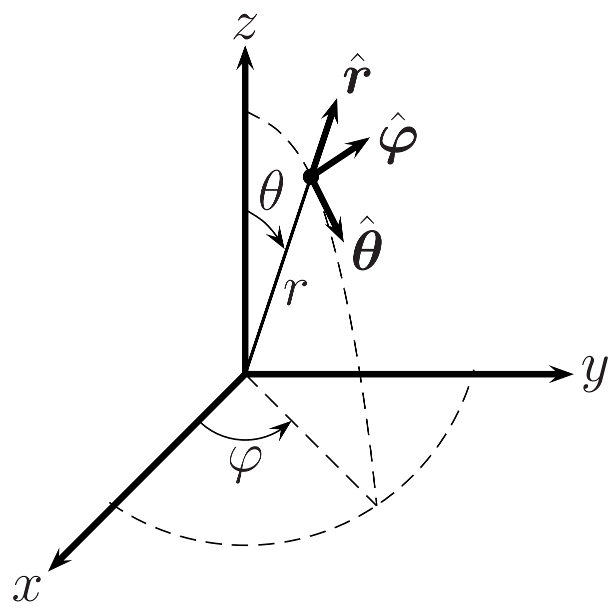
$\phi(b) - \phi(a) = V$ より,

(21) $$\phi(R) = c_0 + \frac{V}{\log(b/a)} \log R\,. \quad (a < R < b)$$

電場は $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{R}} E_R + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi + \hat{\boldsymbol{z}} E_z = -\boldsymbol{\nabla}\phi(R)$ だから，式 (16) より

(22) $$E_R = -\frac{\partial\phi(R)}{\partial R} = -\frac{V}{\log(b/a)}\frac{1}{R}\,,\ E_\varphi = E_z = 0\,.\ (a < R < b)$$

- 球座標 (r, θ, φ)



(23)
$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z &= r\cos\theta\,. \end{aligned}$$

基底ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ は,

(24)
$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}} &= \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta\,, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta\sin\varphi - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta\,, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

線要素は,

(25)
$$d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,rd\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,r\sin\theta d\varphi\,.$$

体積要素は,

(26)
$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,.$$

全微分は,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi \,. \tag{27}$$

$$df = d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, r d\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\, r\sin\theta d\varphi \tag{28}$$

と比較して,

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\,, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,. \tag{29}$$

つまり，球座標 (r, θ, φ) では,

$$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial r}\,, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}) = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\,. \tag{30}$$

ラプラシアンは,

(31)
$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,, \ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} = -\hat{\boldsymbol{r}}\,, \ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,$$
$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

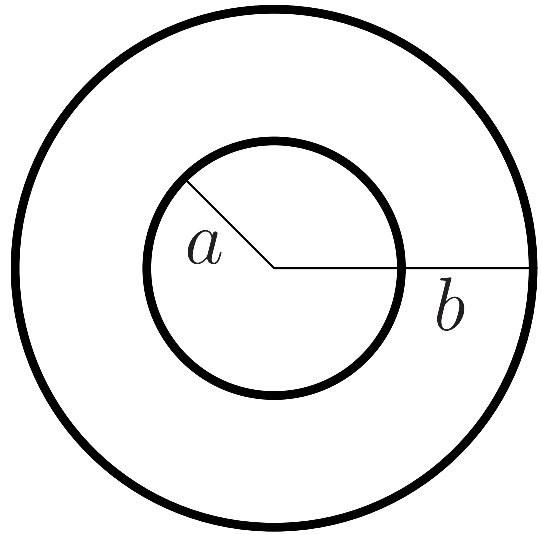
などに注意して,

(32)
$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

○ 例題 3: 半径 a, b ($a < b$) の同心導体球面

球座標で考える. $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)$. 式 (3) は, 式 (32) から,

(33) $$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = 0$$



解は,

(34) $$\phi(r) = c_0 + \frac{c_1}{r} \,.$$

$\phi(b) - \phi(a) = V$ とすれば,

(35) $$c_1 = \frac{ab}{a-b} V \,.$$

電場は $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}} E_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} E_\theta + \hat{\boldsymbol{\varphi}} E_\varphi = -\boldsymbol{\nabla}\phi(r)$ だから, 式 (30) より,

(36) $$E_r = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{ab}{a-b} \frac{V}{r^2} \,, \ E_\theta = E_\varphi = 0 \,. \quad (a < r < b)$$

● ポアッソン方程式の一般解
$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ で $\phi(\boldsymbol{r}) \to 0$ であるような場合を考える．(電荷が有限の範囲に分布していればよい．)
原点に単位点電荷がある場合,

(37) $$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta^3(\boldsymbol{r})\,.$$

この解は,

(38) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$

と知っている．

(39) $$G(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$

とすると,

(40) $$\triangle G(\boldsymbol{r}) = -\delta^3(\boldsymbol{r})\,.$$

この $G(\boldsymbol{r})$ を用いると,

(41) $$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

の解は

(42) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV'$$

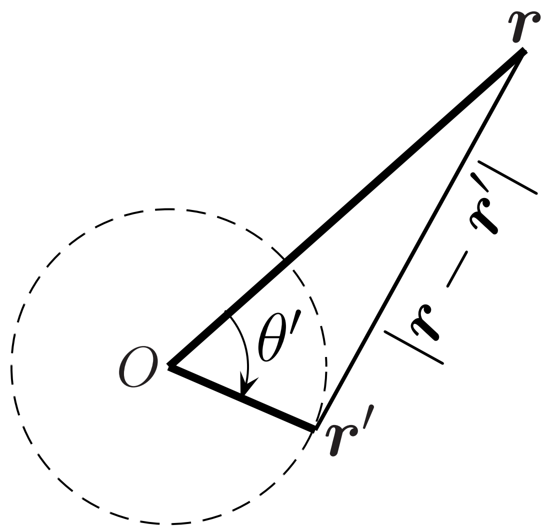
と書ける．実際,

(43) $$\begin{aligned}\triangle\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int \triangle_r G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,.\end{aligned}$$

従って，式 (41) の解は,

(44) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\,.$$

○ 例題 4: 球対称な電荷分布: $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$.



$\boldsymbol{r}$ の方向を z 軸にとり，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ のなす角を θ' とする．式 (44) は,

(45) $$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty r'^2\,dr'\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} d\varphi'\frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\,.$$

φ' の積分は自明で，$\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi$.

θ' の積分は,

(46)
$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta'\,d\theta'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}} = \int_{-1}^1 \frac{d\cos\theta'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}$$
$$= -\frac{1}{rr'}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{rr'}(r+r'-|r-r'|)$$
$$= \begin{cases} 2/r\,, & r>r' \\ 2/r'\,, & r<r' \end{cases}.$$

よって,

(47)
$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho(r')\,r'^2\,dr' + \int_r^\infty \rho(r')\,r'\,dr'\right].$$

半径 r 内の電荷は,

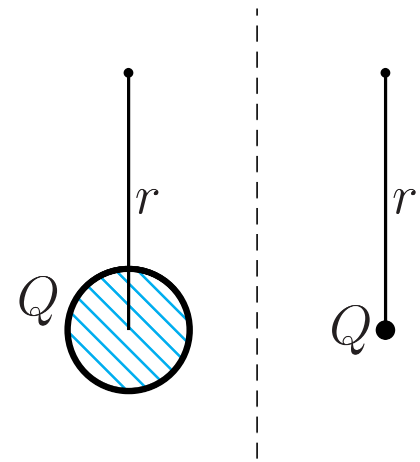
$$Q(r) = \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \int_0^\pi \sin\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \tag{48}$$
$$= 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \,.$$

これを用いて,

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(r)}{r} + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho(r')\, r'\, dr' \,. \tag{49}$$

◇ 電荷が半径 a の球内にのみあるとき,
全電荷は $Q = Q(a)$.

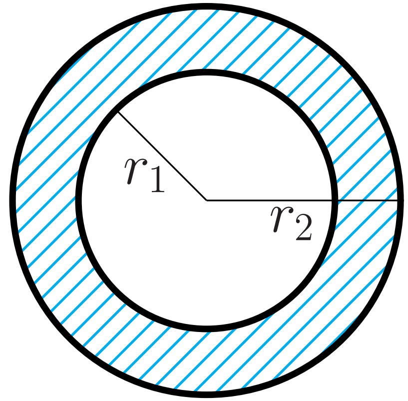
$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \quad (r > a) \tag{50}$$



(原点に点電荷 Q があるときと同じ.)

◇ 電荷が球殻に分布している場合:

(51) $$\rho(r) \begin{cases} \neq 0\,, & r_1 < r < r_2 \\ = 0\,, & \text{それ以外}. \end{cases}$$



$r < r_1$ では,

(52) $$\phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \rho(r')\, r'\, dr' = \text{定数}\,.$$

従って，$\boldsymbol{E} = 0$.（電場はない．）

$r > r_2$ では，($Q = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(r') r'^2\, dr' =$ 球殻の全電荷)

(53) $$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \quad (\text{点電荷と同じ})$$