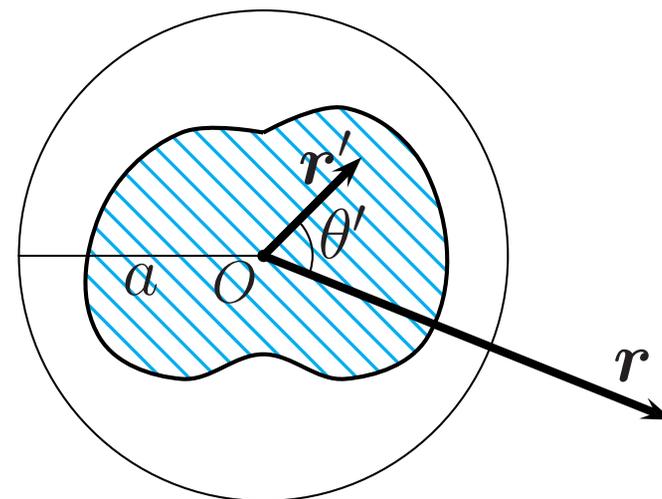


## 1.8 静電ポテンシャルの多重極展開

- 原点  $O$  を中心とする半径  $a$  の球内に電荷分布が収まっているとする。

$$(1) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



で  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ,  $r' \equiv |\mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \theta'$  とする。  $r$  を半径  $a$  の球の外側の点とすると,  $r' < a < r$ 。このとき,

$$(2) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}}$$

を  $r'/r$  の冪級数に展開する。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2}} \\
 &\equiv \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta').
 \end{aligned}$$

$P_{\ell}(x)$  をルジャンドル (Legendre) 多項式という。最初の数項を計算してみると, ( $\cos \theta' = x$ )

$$(4) \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

一般形は, (例えば)

$$(5) \quad P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}.$$

式 (3) を式 (1) に代入して ,

$$(6) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{r^\ell} \int \rho(\mathbf{r}') P_\ell(\cos \theta') r'^\ell dV' \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_\ell(\mathbf{r}) .$$

○ 遠方 ( $r \gg a$ ) で最も重要な項は  $\ell = 0$  の  $\phi_0(\mathbf{r})$  .

$$(7) \quad \phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

ただし ,  $Q \equiv \int \rho(\mathbf{r}) dV$  は全電荷 . すなわち , 十分遠くから見れば , どのような (有限範囲の) 電荷分布も (等量の) 点電荷と見なせる .

○ 遠方で次に重要な項は  $\ell = 1$  の  $\phi_1(\mathbf{r})$  . (もし ,  $Q = 0$  であれば ,  $\ell = 1$  の項が最も重要となる .)

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \cos \theta' r' dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\mathbf{r}') r r' \cos \theta' dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' dV' \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'
 \end{aligned}$$

$$(9) \quad \mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV$$

を用いると,

$$(10) \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}.$$

$\mathbf{p}$  を 電気双極子モーメント(電気双極子能率) という.

注: 一般には  $p$  は本当のベクトルではない. 実際, 座標の原点を  $b$  だけずらして  $r' = r - b$  とすると,

$$(11) \quad \begin{aligned} p &= \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int (\mathbf{r}' + \mathbf{b}) \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV' \\ &= \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV' + \mathbf{b} \int \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b}) dV'. \end{aligned}$$

新しい座標で見た電荷分布  $\bar{\rho}(\mathbf{r}') \equiv \rho(\mathbf{r}' + \mathbf{b})$  を用いて,

$$(12) \quad p = \int \mathbf{r}' \bar{\rho}(\mathbf{r}') dV' + \mathbf{b} \int \bar{\rho}(\mathbf{r}') dV' = \bar{p} + Q\mathbf{b}.$$

( $\bar{p}$  は新しい座標で見た電気双極子モーメント.)

$Q \neq 0$  のとき,  $p$  は座標による. (ベクトルではない.)

$Q = 0$  のとき,  $p = \bar{p}$ . 座標によらない. (ベクトル.)

○  $l = 2$  のとき ,

$$(13) \quad \phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{1}{r^3} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j .$$

ここで ,  $Q_{ij}$  は電気四重極子モーメントで ,

$$(14) \quad Q_{ij} \equiv \int (r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{r}^2) \rho(\mathbf{r}) dV .$$

○  $l \geq 3$  についても同様に展開でき , このような展開を多重極展開という .

- 例: デカルト座標で  $(0, 0, d/2)$  と  $(0, 0, -d/2)$  にそれぞれ  $+q$  と  $-q$  の点電荷がある場合 . ( $d > 0$ )

点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  と各点電荷との距離を  $r_{\pm}$  とすると ,

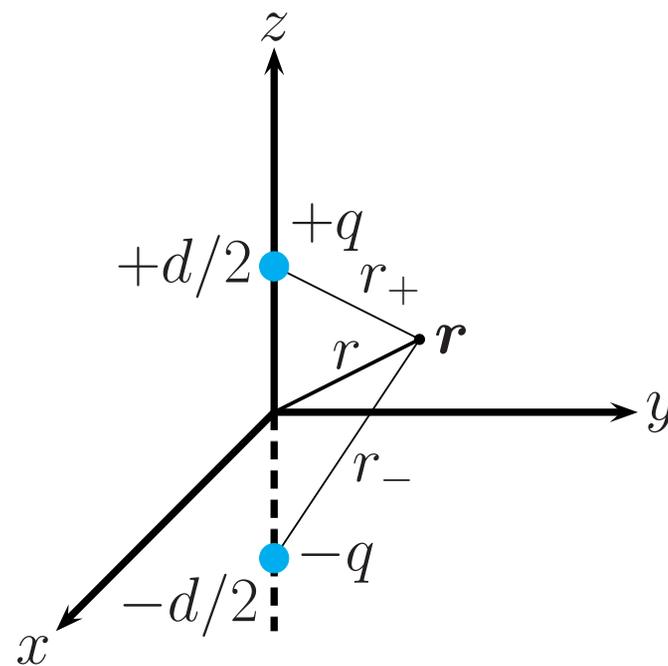
$$(15) \quad r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d/2)^2} .$$

ポテンシャルは ,

$$(16) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) .$$

$r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg d$  では ,

$$(17) \quad r_{\pm} = r \sqrt{1 \mp \frac{zd \mp d^2/4}{r^2}} = r \mp \frac{zd}{2r} + \dots .$$



$$(18) \quad \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \simeq \frac{zd}{r^3}.$$

よって,

$$(19) \quad \phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{zd}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{z}}.$$

一般論での結果, 式 (7), (10) を使うならば,

$$(20) \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta^3\left(\mathbf{r} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}\right) - q\delta^3\left(\mathbf{r} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}\right)$$

であるから,

$$(21) \quad \int \rho(\mathbf{r}) dV = q - q = 0. \quad (\text{全電荷はゼロ})$$

よって,

$$(22) \quad \phi_0(\mathbf{r}) = 0.$$

$$(23) \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = q \frac{d}{2} \hat{\mathbf{z}} - q \left( -\frac{d}{2} \hat{\mathbf{z}} \right) = qd \hat{\mathbf{z}}$$

となり ,

$$(24) \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

より , 式 (19) と一致する .

● 電気双極子の作る電場  
ポテンシャル

$$(25) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

より ,  $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$  ,  $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$  を用いて ,

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} . \quad (r \neq 0) \end{aligned}$$

- 例題 1: 球座標での電気双極子の作る電場  
 $\mathbf{p} = p\hat{z}$  とする .

$$(27) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} .$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  より , 式 (1. 7. 30) を用いて ,

$$(28) \quad \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3} , \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} , \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}\phi = 0 . \end{aligned}$$

● 外場中の電気双極子のエネルギー

外場を  $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$  とする．電荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  の  $\phi_{\text{ext.}}$  中でのエネルギーは，

$$(29) \quad W = \int \rho(\mathbf{r}) \phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) dV. \quad \text{cf. 式 (1.4.22)}$$

原点を適当に選んで，そのまわりに  $\rho(\mathbf{r})$  が分布しているとする． $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$  の領域で  $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$  が緩やかに変化しているとして， $\phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r})$  を原点のまわりでテイラー展開すると，

$$(30) \quad \begin{aligned} \phi_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) &= \phi_{\text{ext.}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{\text{ext.}}(0) + \cdots \\ &= \phi_{\text{ext.}}(0) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) + \cdots \end{aligned}$$

式 (29) に代入して，

$$\begin{aligned}
 (31) \quad W &= \phi_{\text{ext.}}(0) \int \rho(\mathbf{r}) dV - \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) \cdot \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV + \dots \\
 &= Q\phi_{\text{ext.}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) + \dots
 \end{aligned}$$

電気双極子では  $Q = 0$  ゆえ ,

$$(32) \quad W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext.}}(0) .$$

$\mathbf{p}$  と  $\mathbf{E}_{\text{ext.}}$  が同じ方向のときエネルギーが最小 .

