2.2　誘電体中のガウスの法則

- 静電場について,

(1) $$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,.$$

この式は (微視的な意味で) 常に正しい．ただし，$\rho(\boldsymbol{r})$ は全ての電荷密度．誘電体中では,

(2) $$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_f(\boldsymbol{r}) + \rho_p(\boldsymbol{r})\,.$$

ここで，$\rho_f(\boldsymbol{r})$ は自由電荷密度で，(手で与えた電荷を含め) 原子・分子に束縛されていない自由な電荷の密度である.
真空中では，$\rho = \rho_f$ であった.
一方，誘電体中では電場 $\boldsymbol{E}$ により分極 $\boldsymbol{P}$ が生じ，分極電荷密度 ρ_p が現われる．どのような $\boldsymbol{P}$，ρ_p が生じるかは誘電体の種類による.
常に ρ_p を考慮しながら誘電体を取り扱うのは不便.

- 電束密度 $\boldsymbol{D}$

式 (2. 1. 8) を用いて

(3) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\{\rho_f(\boldsymbol{r})+\rho_p(\boldsymbol{r})\}=\frac{1}{\varepsilon_0}\{\rho_f(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\}\,,$$

(4) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot[\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})]=\rho_f(\boldsymbol{r})\,.$$

ここで電束密度

(5) $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\equiv\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$$ cf. 式 (1. 1. 5)

を導入すれば,

(6) $$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\rho_f(\boldsymbol{r})}$$ 誘電体中のガウスの法則

を得る．(ρ_p は忘れて ρ_f だけ考えればよい．)

● 一様で等方的な誘電体では，弱い電場に対して，

(7) $$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \chi_e:\ \underline{\text{電気感受率}}\text{(比例定数)}\,.$$

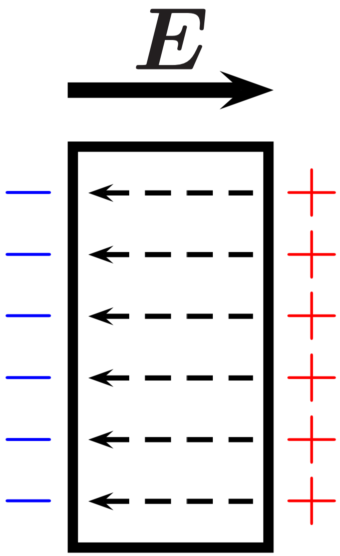
このとき，

(8) $$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = (\varepsilon_0 + \chi_e)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}\,.$$

(9) $$\varepsilon(\equiv \varepsilon_0 + \chi_e):\ \underline{\text{誘電率}}\,.$$

電気感受率 χ_e，誘電率 ε は物質 (誘電体) の性質を表す定数.

通常，分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{E}$ と同じ方向を向くから，$\chi_e > 0$．(式 (1. 8. 32) 参照．)
従って，$\varepsilon > \varepsilon_0$.
⇒ (同じ ρ_f に対して) 電場は弱まる.



- 静電場に対するもう一つの式: $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$.

これは誘電体中でも成り立つ．なぜなら，微視的に $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ が成り立っていれば，これを平均化しても $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

このことから誘電体中でも静電場について，

(10) $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \,.$$

式 (6)，(8) を用いて，

(11) $$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho_f(\boldsymbol{r})}{\varepsilon}$$ 誘電体中のポアッソン方程式．

(真空中のもので，$\varepsilon_0 \to \varepsilon$，$\rho \to \rho_f$ としただけ．)

● 時間に依存する場合.
分極ベクトルも時間と共に変化.

(12) $$\rho_p(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

(13) $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

(14) $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho_f(\boldsymbol{r},t)\,.$$

通常の一様で等方的な誘電体については，弱い $\boldsymbol{E}$ について，

(15) $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,.\quad (\varepsilon:\ \text{定数})$$

(電磁波のように振動している場合は，一般に ε は振動数の関数になる．)