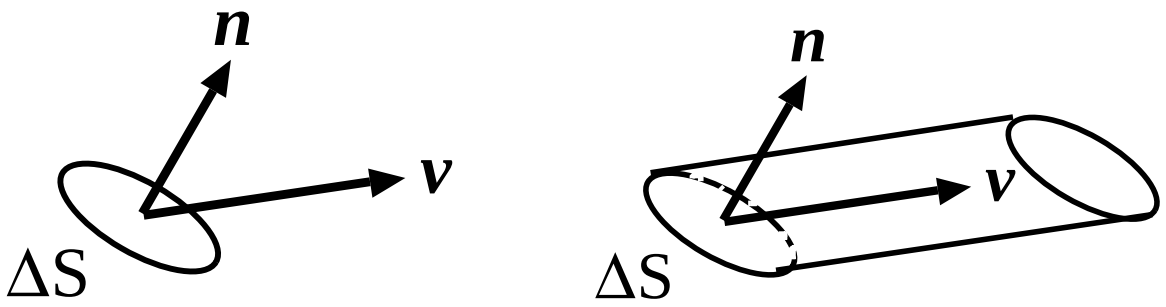
2.5 ガウス (Gauss) の法則

2.5.1 ベクトル場の面積分と流束 (flux)

各点での速度が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$(ベクトル場) で与えられるような流体を考える．
小さな面 ΔS を考え，その法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．
単位時間に ΔS を通って流れる流体の量は，v_n を $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分として，

(1) $$v_n \, \Delta S = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \Delta S = \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{n} \, \Delta S \equiv \Delta \boldsymbol{S}.$$

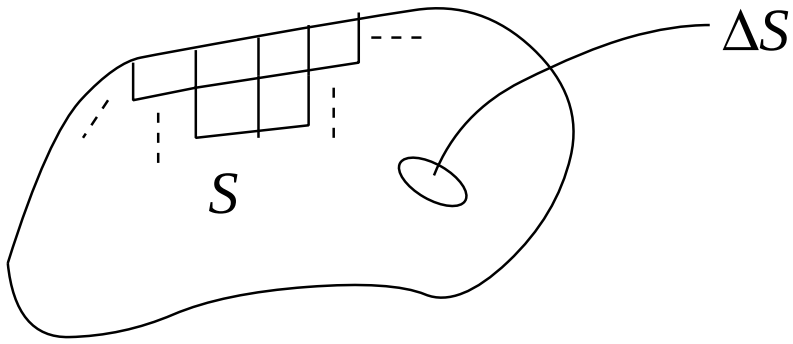
となる．



一般の面 S について，単位時間に S を通って流れる流体の量は，S を多数の小さな面 ΔS_i に分割して考えれば，

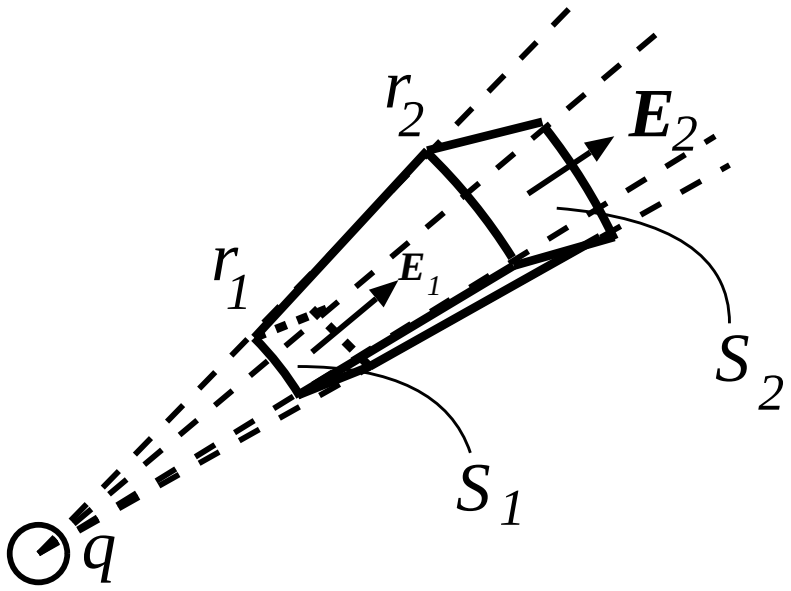
(2) $$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i = \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

これを S を通る流束 (flux) と言う．



2.5.2　ガウスの法則 (積分形)

- 流束の考え方を電場にも当てはめてみる．(実際には何も流れていないけれども．)
- 正の点電荷 q が 1 個ある場合．



図のような半径 r_1 と r_2 の球面の一部で挟まれた領域の表面 S(閉曲面) を考える．

(3)　$S = S_1 + S_2 +$ 側面

側面を通る電場は明らかにゼロ．

(4)
$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

閉曲面の場合，法線ベクトルは外向きにとる．

(5) $$\int_{S_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1^2}\int_{S_1} dS$$

(6) $$\int_{S_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2^2}\int_{S_2} dS$$

(7) $$\frac{\int_{S_1} dS}{\int_{S_2} dS} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

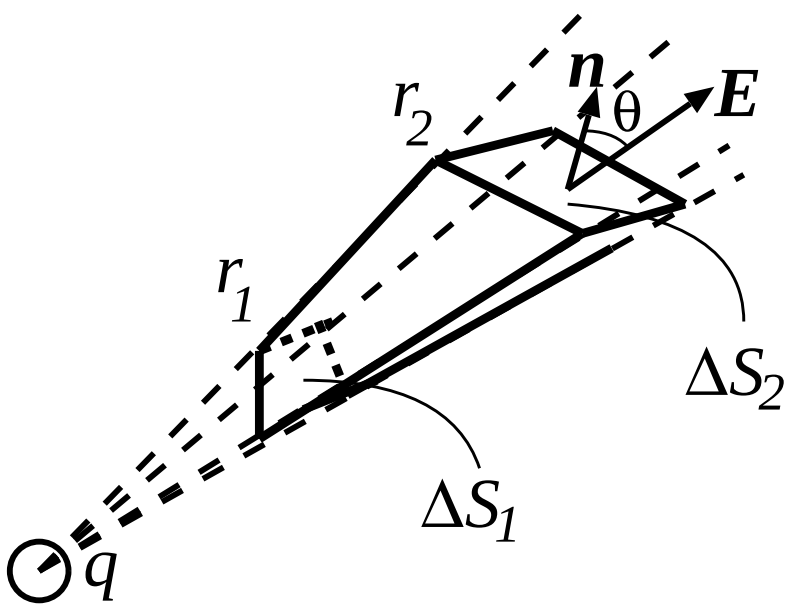
ゆえ，

(8) $$-\int_{S_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

すなわち，

(9) $$\int_{S} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

次に，中心部分の角度が小さいとして，S_1 ，S_2 が動径について“傾いて”いる場合を考えよう．

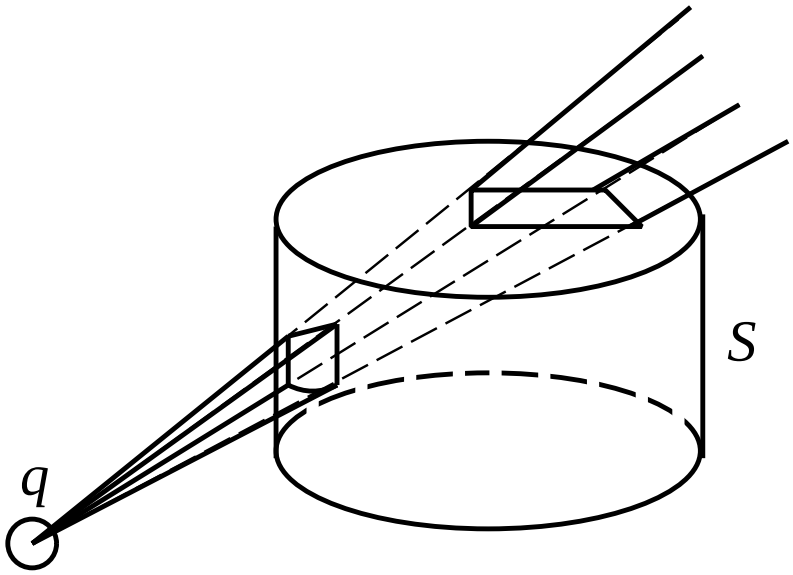


ΔS_i の面積は傾いていないときの $1/\cos\theta$ 倍になる．ΔS_i は小さいから $\boldsymbol{E}$ の値はその上で一定とみなせ，$\boldsymbol{E}$ の法線成分は $E_n = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = E\cos\theta$ ．よって，

(10) $-\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_2$

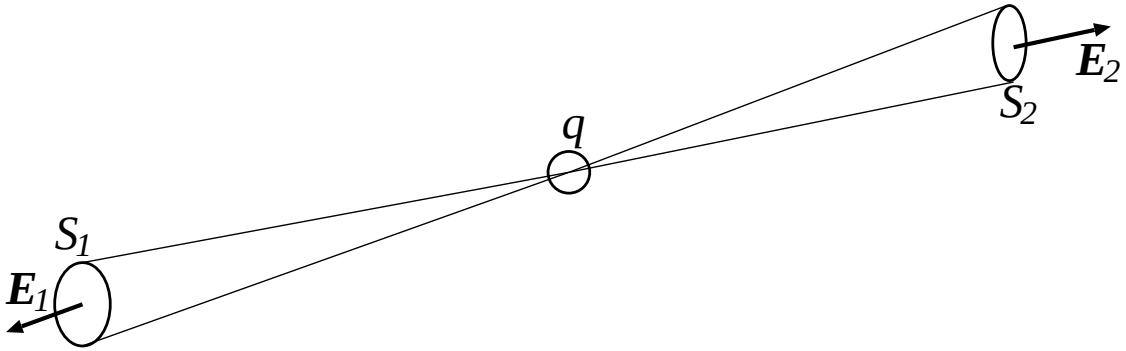
式 (9) が成り立つ．

内部に電荷 q を含まないような一般の閉曲面 S についても，図のような小錐体の集まりを考えれば，下面と上面で流束は打ち消し合う．

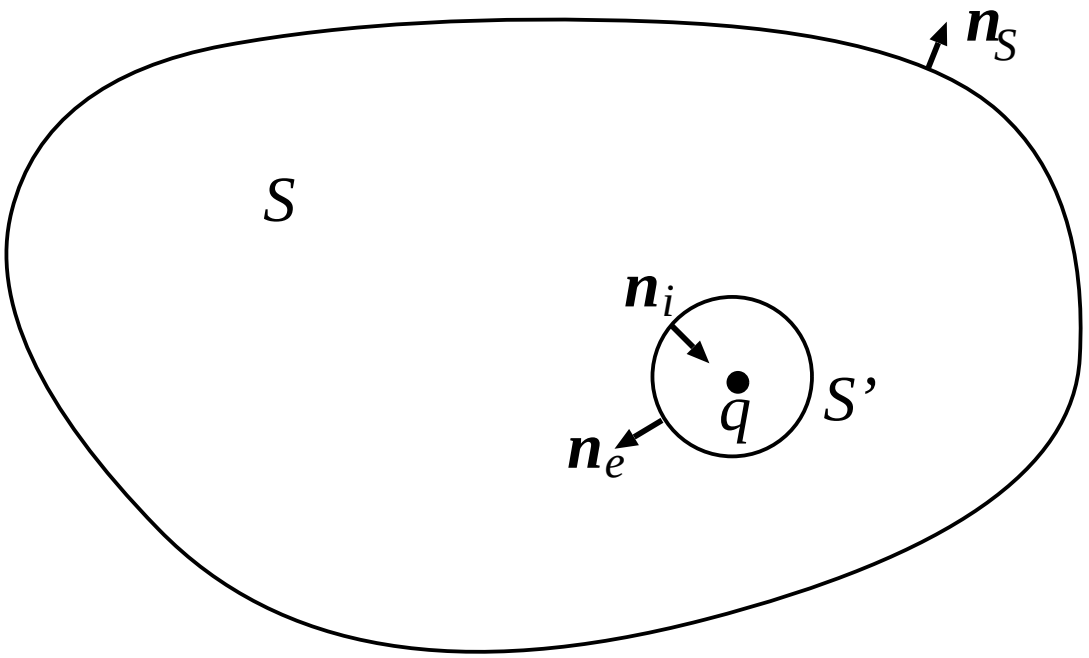


(11) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \quad S \text{ は } q \text{ を含まない閉曲面．}$$

S が q をその内部に含む場合，明らかに S_1 と S_2 の寄与は打ち消さない．



そこで，q を囲む小さな面 S' を考え S の内部から S' の内部を取り除く．



この中空の領域については，(q を含まないから)

$$\int_{S+S'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \tag{12}$$

が成り立つ．(このとき，S' の法線ベクトルは内向きの $\boldsymbol{n}_i$ ．)
S' の法線ベクトルを外向きの $\boldsymbol{n}_e$ にとることにすれば，

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{13}$$

(すなわち，S を通る流束は S' を通る流束に等しい．)
S' の形は任意だから，半径 r の球面を考えることにすると，

$$\int_{S'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} (= N \Leftarrow \text{電気力線の本数}). \tag{14}$$

(うまく，r に依らない数になっている．)

式 (13) より，

(15) $$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad S \text{ は } q \text{ を含む閉曲面.}$$

まとめると，

(16) $$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0, & q \text{ が } S \text{ の外部にあるとき} \\ q/\varepsilon_0, & q \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases}$$

(S は任意の閉曲面．)

- 点電荷が複数あるとき．

(17)
$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i$$

から，

(18)
$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i \int_S \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i\in \text{内部}} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0},$$

$$Q_{\text{int.}} \equiv \sum_{i\in \text{内部}} q_i = S \text{ の内部にある電荷の和.}$$

- 連続的な電荷分布の場合．(和を積分に置き換えればよい．)

(19) $$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0}\ , \quad Q_{\text{int.}} \equiv \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, dV$$

ただし，V は S の内部の領域．

- まとめ

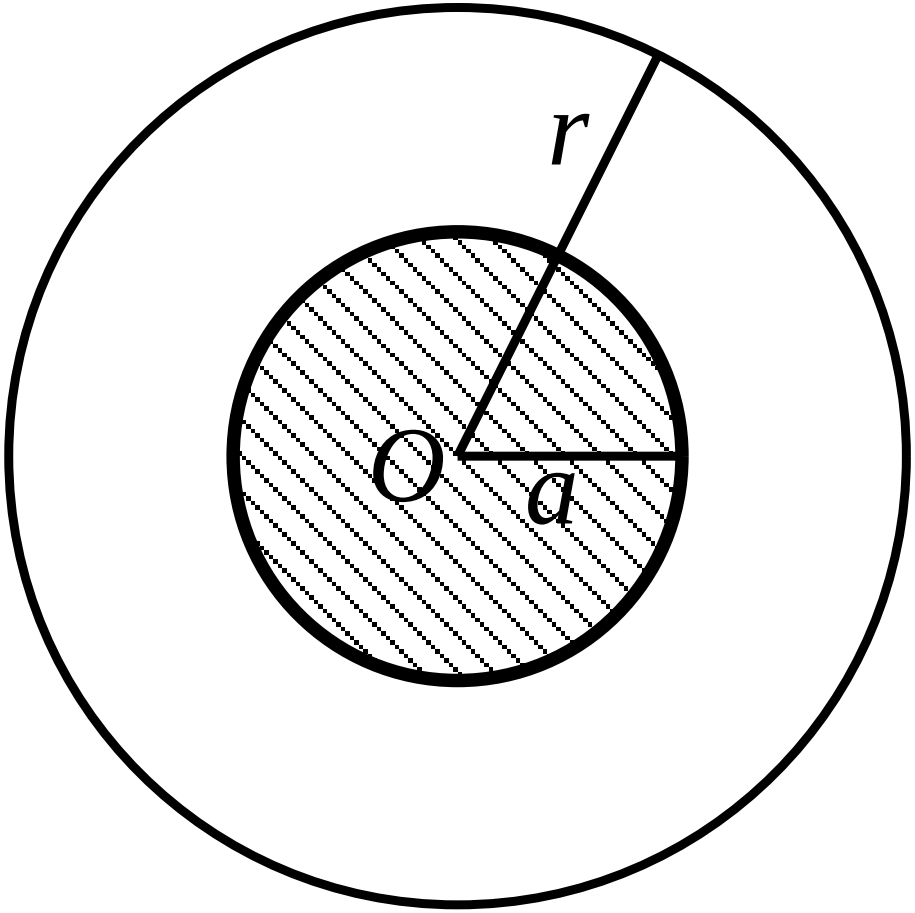
積分形のガウスの法則

(20) $$\boxed{\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{\text{int.}} \equiv S \text{ の内部の電荷}}$$

$1/r^2$ 則の帰結

- 例 1: 一様な球状電荷分布

原点 O を中心とする半径 a の球の内部に電荷が一様に分布しているとする．全電荷を Q，$r \leq a$ での電荷 (体積) 密度を ρ とすると，



(21) $$Q = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \,.$$

中心 O，半径 $r(> a)$ の球面を S としてガウスの法則を適用すると，

(22) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

対称性から，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は動径方向を向き，S 上では一定の大きさ $E(r)$ を持つから，

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) \tag{23}$$

よって，

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\,, \quad r > a\,. \tag{24}$$

(中心に点電荷 Q があるときと同じ．)

$r < a$ のときは，ガウスの法則は，

$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho\,. \tag{25}$$

左辺は上と同じで，

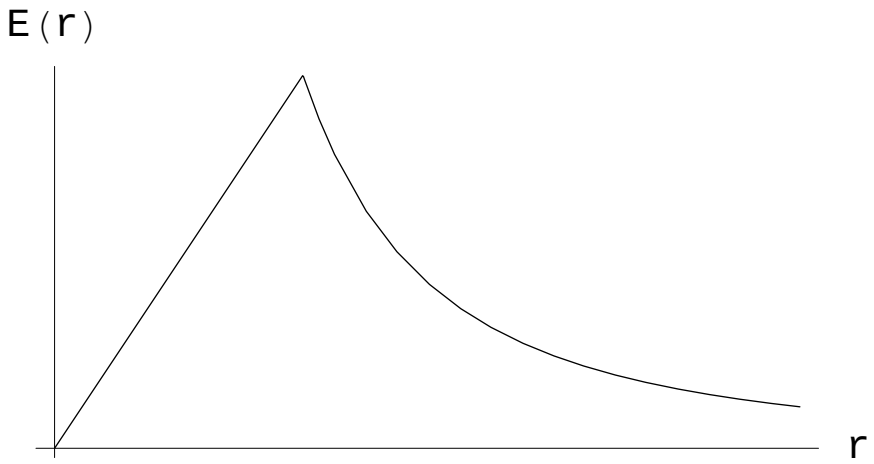
(26)
$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi r^2 E(r)\,.$$

よって，

(27)
$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3} r\,.$$

まとめると，

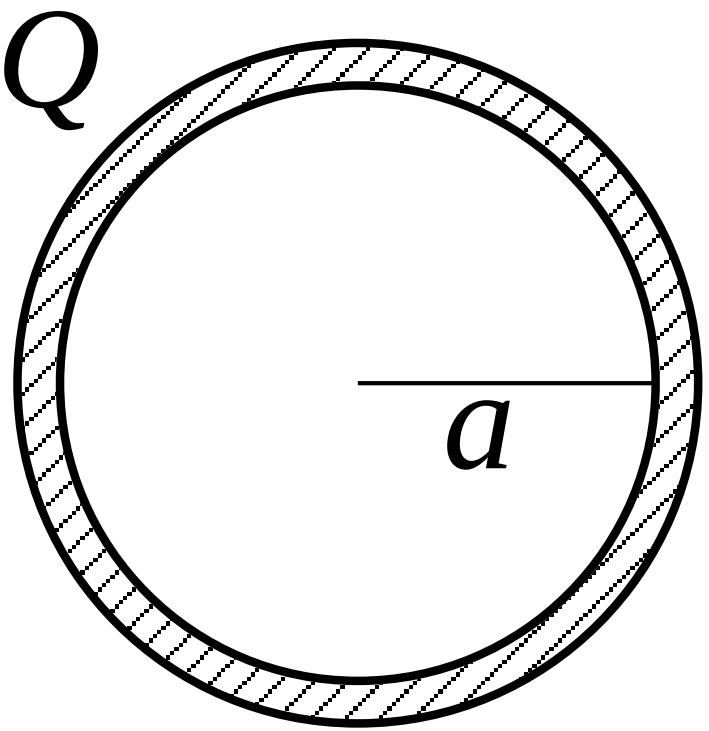
(28)
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^3}, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > a \end{cases}$$



- 半径 a のうすい球殻上に一様に分布した電荷の場合は，

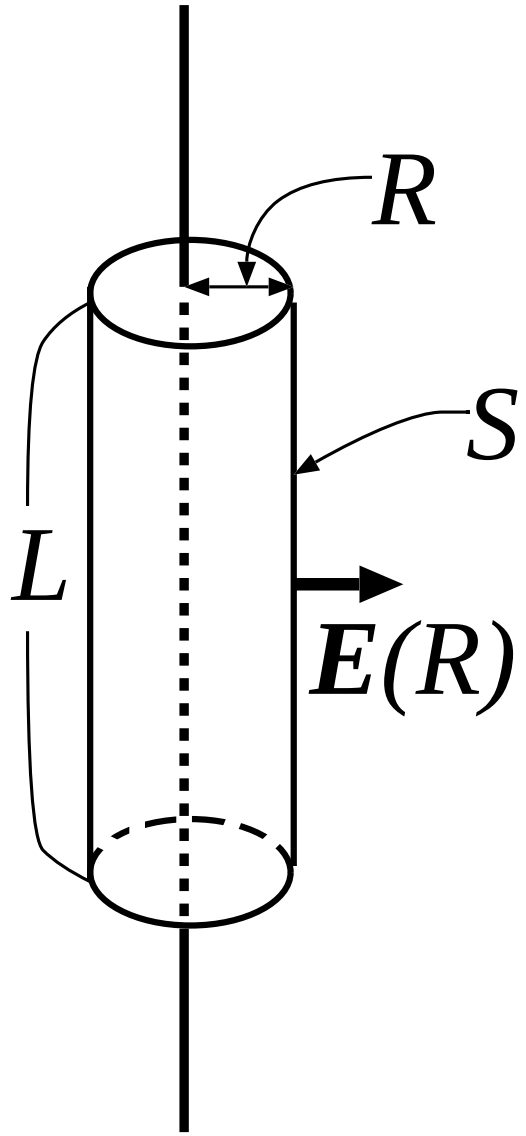
$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > a \end{cases}$$

となる．(全電荷 Q ．)



- 例 2: 一様な直線状電荷分布 (cf. §§ 2. 3. 3 例 2)

電荷の線密度を λ とし，直線電荷を中心とする半径 r，長さ L の円柱の表面 S を考える．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は中心軸に垂直で，軸対称性より，中心軸からの距離 R のみの関数のはず．ガウスの法則より，



(29) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} ,$$

$$\text{左辺} = E(R) \int_{S \text{ の側面}} dS = 2\pi R L E(R) .$$

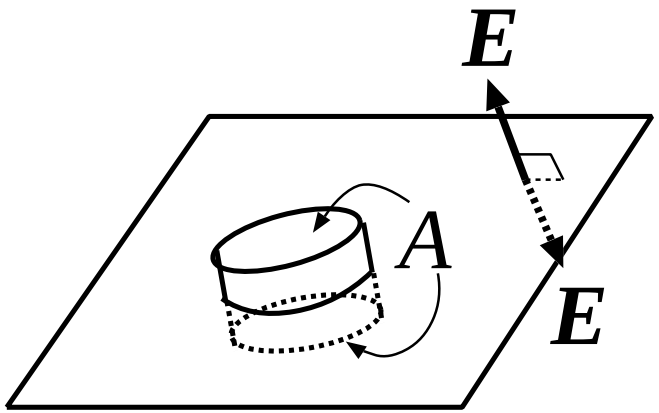
よって，

(30) $$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} .$$

(§§ 2. 3. 3 例 2 と同じ結果)．

- 例 3: 一様な平面状電荷分布

無限に広い一様な平面電荷分布 (電荷の面密度 σ) を考える．電場は面に垂直で面の上下で反対向き．また，面上の位置に依らない．面を垂直に貫く円柱 (底面積 A) を考え，その表面 S についてガウスの法則を用いると，



(31)
$$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} .$$

側面は積分に寄与しないから，底面での電場の大きさを E とすれば，

(32)
$$E\ A(\text{上面}) + E\ A(\text{下面}) = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} .$$

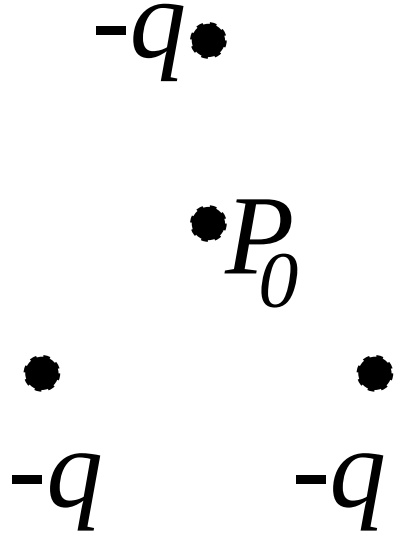
よって，

(33)
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} .$$

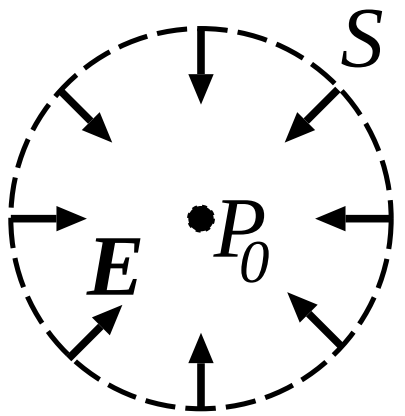
面からの距離にも依らない一様な場．

• 静電場内での釣り合い

静電場内でクーロン力が釣り合う点 P_0 を考える．このような点が安定がどうか，すなわち，この点に正の試験電荷 (test charge，静電場を変えないような仮想的な点電荷) を置き，すこし位置をずらしたときに復元力が働くかどうか，を考える．P_0 を囲む仮想的な小さな面 S を考えると，もし P_0 が安定な釣り合い点ならば，S 上では常に P_0 方向 (内向き) の電場 $\boldsymbol{E}$ があるはず．このとき，



(34)
$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} < 0\,.$$



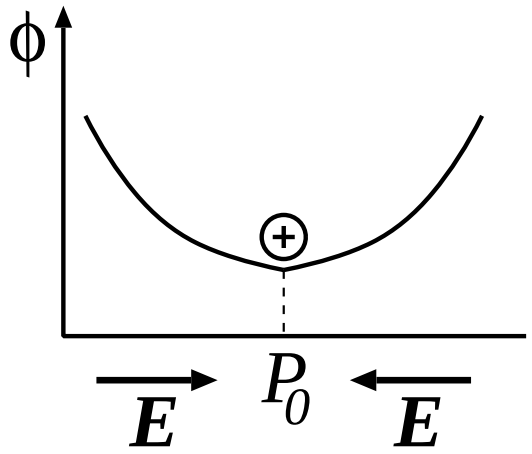
つまり，ガウスの法則より S 内には負の電荷がなければならない．S を無限小にとると，P_0 に負の電荷がなければならない．従って，電荷のない場所では安定な釣り合い点はない．

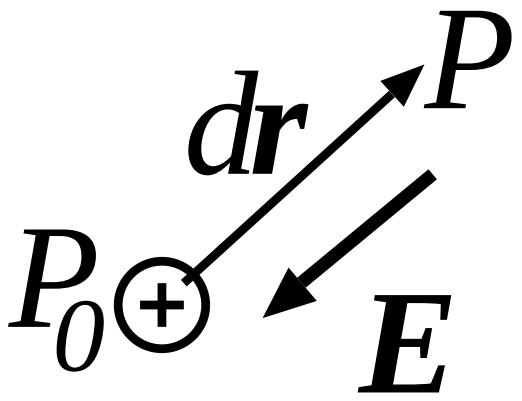
$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ であったから，安定な釣り合いの点 P_0 では，$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = 0$ で，ϕ は極小値または極大値をとる．

あるいは，$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$ で，安定な釣り合いの点からどの方向に向かってこの積分をしても，P_0 の近傍では ϕ は増えるだけか減るだけである．

$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} < 0 \;\Rightarrow\; \phi(P) > 0$. ($\phi(P_0) = 0$ とした．)

つまり，安定な釣り合いの点では極小値または極大値をとる．





電荷のない場所では安定な釣り合いの点がないということは，ポテンシャルの言葉でいうと，電荷のない領域ではポテンシャルは極小値も極大値もとらない，ということになる．

2.5.3　ガウスの法則 (微分形)

- ベクトル場の発散

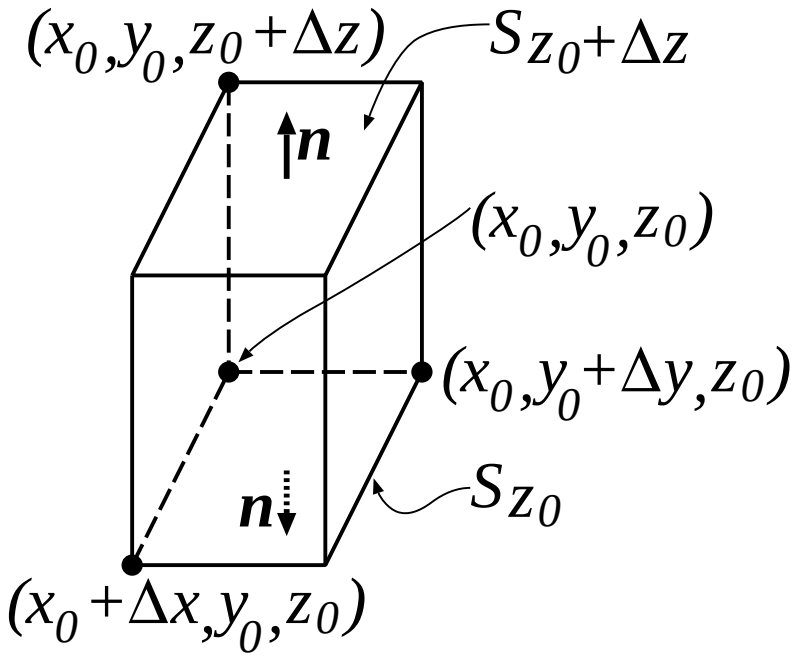
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について

(35)　$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})(= \mathrm{div}\boldsymbol{A}) = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$　(スカラー量)

を $\boldsymbol{A}$ の発散 (divergence) という .

- ガウスの定理

○ 図のような小さい直方体 V_0 を考える . この直方体の表面 S_0 を通るベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の流束を考えよう .



まず，z 軸に垂直な面 S_{z_0}(下面) と $S_{z_0+\Delta z}$(上面) について考える．
S_{z_0} を通る流束は (法線ベクトルの向きに注意して)，

$$-\int_{S_{z_0}} A_z(x,y,z_0)\,dxdy\,. \tag{36}$$

$S_{z_0+\Delta z}$ を通る流束は

$$\int_{S_{z_0+\Delta z}} A_z(x,y,z_0+\Delta z)\,dxdy\,. \tag{37}$$

これらの和は (ΔV_0 を小直方体の体積として)，

$$\int \{A_z(x,y,z_0+\Delta z)-A_z(x,y,z_0)\}\,dxdy \tag{38}$$

$$\simeq \int \frac{\partial A_z(x,y,z_0)}{\partial z}\Delta z\,dxdy \simeq \frac{\partial A_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z}\,\Delta V_0\,.$$

x 軸，y 軸に垂直な面についても同様．よって，小直方体の表面から出る流束は，

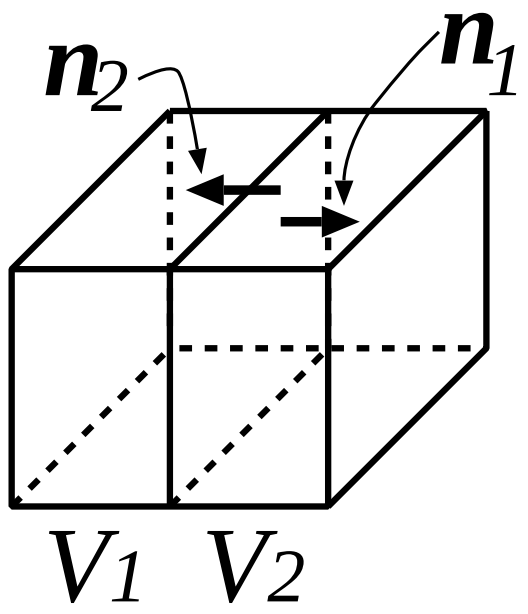
$$\text{(39)} \qquad \int_{S_0} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \simeq \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V_0 = (\nabla \cdot \boldsymbol{A})|_{\boldsymbol{r}=(x_0,y_0,z_0)} \Delta V_0 \,.$$

ある点での $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ はその点の近傍での単位体積あたりの外向きの流れ (わき出し) を表わす．

○ 流束の分割: 図のような 2 つの小直方体 V_1, V_2 を考える．$V_{1(2)}$ の表面 $S_{1(2)}$ の流束は，

$$\text{(40)} \qquad \int_{S_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, \Delta V_1 \,,$$

$$\text{(41)} \qquad \int_{S_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, \Delta V_2 \,.$$



V_1 と V_2 を合わせたものを V_{1+2}，その表面を S_{1+2} とすると，V_1 と V_2 の境界面での面積分は打ち消し合うから ($\boldsymbol{n}$ が逆向き)，

(42)
$$\int_{S_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_{1+2}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

よって，

$$\int_{S_{1+2}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}\;\Delta V_1 + \nabla\cdot\boldsymbol{A}\;\Delta V_2\,.$$

このことから，一般の (小さくない) 領域 V を小直方体に分割すると，V の表面を S として，(ΔV_i は i 番目の小直方体の体積)

(43)
$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i \nabla\cdot\boldsymbol{A}\;\Delta V_i = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\;dV \quad \text{(体積積分)}$$

○ まとめると，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ について，領域 V とその表面 S(あるいは閉曲面 S とそれに囲まれた領域 V) を考えると，

(44)
$$\int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\, dV$$

これをガウスの定理という．

- 微分形のガウスの法則
  - 積分形のガウスの法則は

(45) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, dV \,.$$

これは，閉曲面 S 上の電場とその内部の電荷との関係を表わす．一般に電荷と面は離れていてもよいから (§§2. 5. 2 の例)，近接相互作用の考え方になっていない．

  - ガウスの定理を用いると，

(46) $$\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\, dV \,.$$

従って，式 (45) は，

(47) $$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, dV \,.$$

V は任意の領域だから，これが成り立つためには，

(48) $$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}}$$ 微分形のガウスの法則.

点 $\boldsymbol{r}$ での電荷密度が同じ点 $\boldsymbol{r}$ での電場の “微分” を決定していると考えられるから，近接相互作用の考え方になっている．
例えば，E_x の変化だけを考えると ($E_y, E_z = \text{const.}$)，

(49) $$E_x(x+\Delta x, y, z) - E_x(x, y, z) \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}\,\Delta x$$

$$= \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}(x, y, z)\,\Delta x = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}\,\Delta x\,.$$

すなわち，

(50) $$E_x(x+\Delta x, y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}\,\Delta x\,.$$

○ 例 1: §§2. 5. 2 の例 1 の電場が微分形のガウスの法則を見たしていること .

(51)
$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

(52)
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}\,, & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,, & r > a,\ Q = 4\pi a^3\rho_0/3 \end{cases}$$

$r < a$ では ,

(53)
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$r > a$ では，

$$\text{(54)}\quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} \right) = 0$$

ただし，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

等を用いた．

- まとめ: 静電場の法則

(55) $$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \,.$$

(56) $$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \,.$$

式 (55) は $\rho, \boldsymbol{E}$ が時間に依存しているときも正しい．(理由は第 5 章で．)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r}, t)}{\varepsilon_0}$$