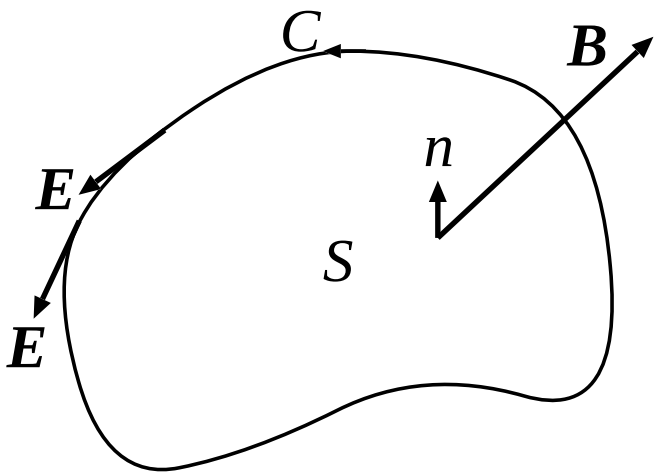
# 第4章 電磁誘導

# 4.1 ファラデーの電磁誘導の法則

## 4.1.1 ファラデー (Faraday) の法則

- 閉曲線 $C$ とそれに囲まれた面 $S$ を考える．

$C$ が導線の回路だと考え，回路中の単位電荷に働く力の接線成分を回路につき 1 周積分したものをその回路の起電力 $\phi_{em}(t)$ という．つまり，




$$\phi_{em}(t) = \oint_C [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)] \cdot d\boldsymbol{r} \,. \tag{1}$$

単位は $V$(ボルト)．

注 1) $C$ が実際の導線回路でなくても空間内の閉曲線について $\phi_{em}$ を考えることができる．

注 2) 静電場であれば，第 1 項はゼロ．

● 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の $S$ の法線成分を，$S$ 上で積分したものを $C$ を貫く磁束 $\Phi(t)$ という．

(2) $$\Phi(t) = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \left( = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS \right) .$$

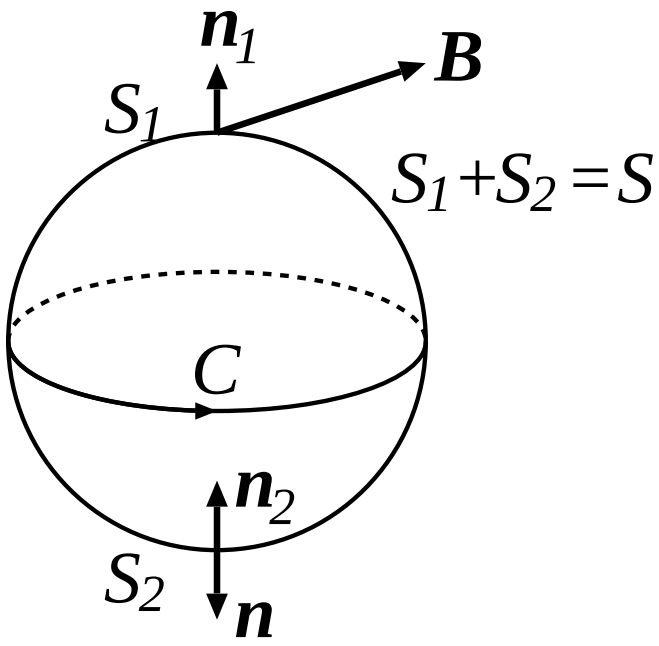
単位は $Wb$(ウェーバー)．

○ $\Phi(t)$ は $S$ のとり方に依らない．

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_1 , \ \Phi_2 = \int_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}_2 .$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{S_1} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_1 dS_1 - \int_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}_2 dS_2$$

$\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}$ に注意すると，



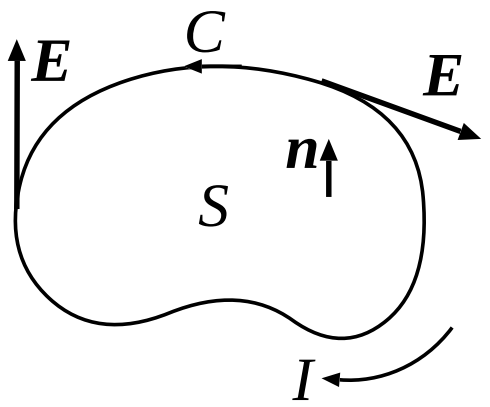
(3)
$$\begin{aligned}
\Phi_1 - \Phi_2 &= \int_{S_1} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS \\
&= \int_{S} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_{S} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \\
&\quad \Leftarrow \text{(ガウスの定理)} \\
&= \int_{V} \nabla\cdot\boldsymbol{B}\, dV \quad V\text{: } S \text{ の内部の領域} \\
&\quad \Leftarrow \text{(3. 3. 23) の次の式} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

- ファラデーの法則 (電磁誘導 現象)

(4)
$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

○ 閉回路に発生する起電力はその回路を貫く磁束の時間変化率に比例する．

○ $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ のとき，$\phi_{em} < 0$ で電流は $C$ の向きの逆向きに流れる．$I$ の作る $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} < 0$ の方向で，$\Phi$ を減少させる．$\frac{d\Phi}{dt} < 0$ のとき，$\phi_{em}$ は $\Phi$ を増やそうとする．




$\Rightarrow \phi_{em}$ は磁束の変化を妨げる方向に発生する．

レンツ (Lentz) の法則

● $\frac{d\Phi}{dt}$ の２つの成分

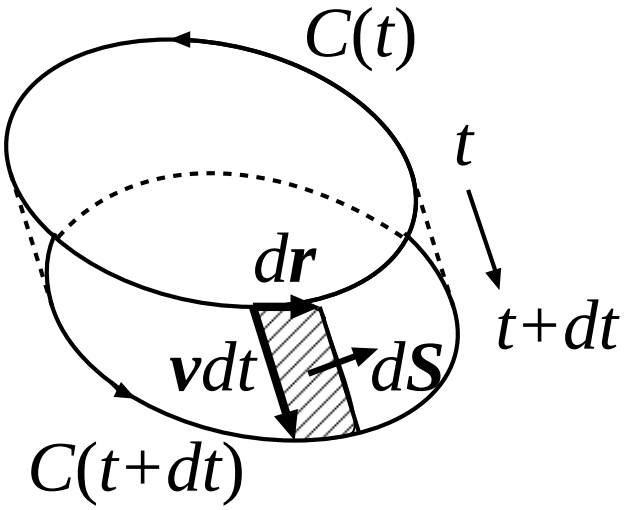
$$\text{(5)} \qquad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} + \frac{d}{dt}\left(\int_S d\boldsymbol{S}\right)\cdot \boldsymbol{B}$$

$$\equiv \frac{d\Phi_B}{dt} + \frac{d\Phi_C}{dt}.$$

第１項は，回路が固定されていて，$\boldsymbol{B}$ が $t$ に依る場合．
第２項は，$\boldsymbol{B}$ が $t$ に依らず，回路が運動している場合．

## 4.1.2　静磁場中を運動する回路

式 (5) の第 2 項．回路 $C$ が速度 $\boldsymbol{v}$ で移動．($\boldsymbol{v}$ は回路中で異っていてもよい．) 微小時間 $dt$ の間の $C$ の線素 $d\boldsymbol{r}$ の変位は $\boldsymbol{v}dt$．これに伴う面要素は $d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}dt) \times d\boldsymbol{r}$．従って，磁束の変化は




(6)
$$d\Phi_C = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r})dt\,.$$

よって，

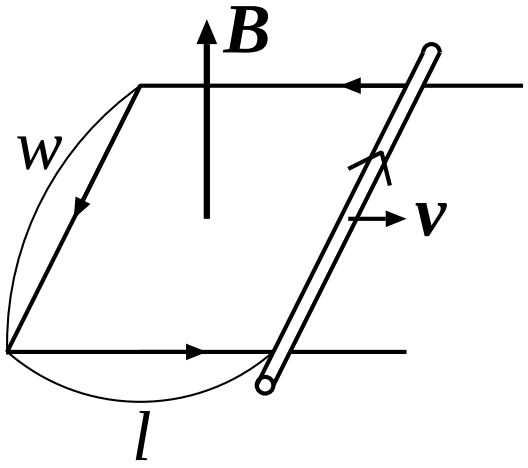
(7)
$$\frac{d\Phi_C}{dt} = \oint_C \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r}) = -\oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

式 (4) は，

(8)
$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi_C}{dt} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{r}\,.$$

これは，式 (1) の右辺第 2 項に相当する．
$\Rightarrow$ ファラデーの法則のうち，回路の運動による部分はローレンツ力で理解できる．

- 例 1: レール上を転がる導体棒




(9) $$\Phi = Bwl\,.$$

よって，式 (4) より，$v = dl/dt$ を用いて

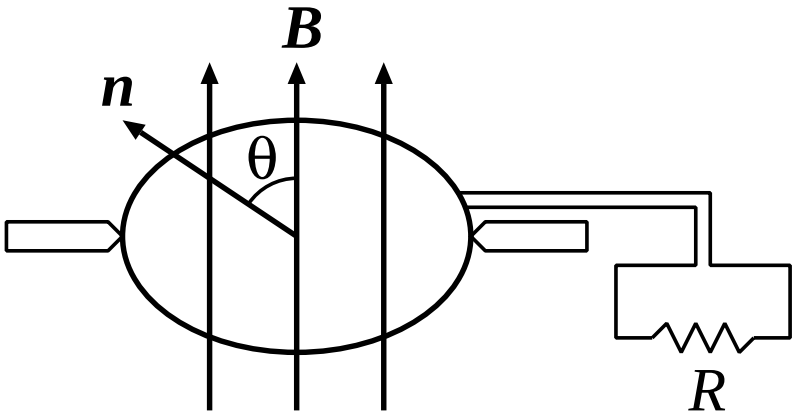
(10) $$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bw\frac{dl}{dt} = -Bwv\,.$$ (矢印の反対向き)

ローレンツ力で考えると，

(11) $$\phi_{em} = \oint_C (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = -wvB\,.$$

- 例 2: 交流発電機

図のような静磁場中で回転するコイルを考える．コイルの法線と $\boldsymbol{B}$ のなす角度を $\theta$ とし，コイルの面積を $S$ をとする．




(12) $$\Phi = BS\cos\theta\,.$$

一定の角速度 $\omega$ でコイルが回転しているとして，$(\theta = \omega t)$

(13) $$\phi_{em} = \omega BS\sin\omega t\,.$$ 交流

このコイルに抵抗 $R$ を接続すると，電位差 $V = \phi_{em}$ だから，

(14) $$V = \omega BS\sin\omega t = V_0\sin\omega t\,,\quad V_0 \equiv \omega BS\,,$$

(15) $$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t\,.$$ (オームの法則を用いた)

○ 発電機のする仕事率は，コイルの電荷に働く力を $\boldsymbol{F}$，速度を $\boldsymbol{v}$，単位長さ当りの電荷の数を $n$ とすると，

(16) $$dP = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,ndr = nv\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,. \quad (\boldsymbol{v}\parallel d\boldsymbol{r})$$

これをコイルについて積分すると，($q$ を電荷として)

(17) $$\begin{aligned} P &= \oint nv\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint qnv\,\frac{\boldsymbol{F}}{q}\cdot d\boldsymbol{r} = I\oint \frac{\boldsymbol{F}}{q}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= I\phi_{em} = IV\,. \qquad \text{cf. (3. 1. 21)} \end{aligned}$$

○ 一方，コイルを回すのに必要な力学的仕事率は，

(18) $$\frac{dW}{dt} = \text{トルク}\times\text{角速度} = ISB\sin\omega t\times\omega = IV\,.$$

(§§3. 2. 2 例 1 の結果を使った．)

## 4.1.3 微分形のファラデーの法則

式 (4) は，式 (1)，(5)，(7) を用いて，

$$\text{(19)}\quad \oint_C (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt} - \frac{d\Phi_C}{dt}$$
$$= -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} + \oint_C (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{r}$$

よって，

$$\text{(20)}\quad \oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

これがファラデーの法則のうちでローレンツ力では解釈できない部分である．ストークスの定理を用いれば，

$$\text{(21)}\quad \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$S$ は任意ゆえ，

(22) $$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0}$$ 微分形のファラデーの法則

- 磁場が時間的に変化すれば電場ができる．
- 定常的な場合，$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$ ゆえ $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ で静電場の式に戻る．

常に正しい電磁誘導に関する式をまとめると，

(23)
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

## 4.1.4　磁場のエネルギー

- 電流の仕事率 ((3. 1. 19))

(24)
$$\frac{dW}{dt} = P = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i}\, dV$$

で，電荷へのエネルギー供給源が変化する磁場であると考えよう．このとき，磁場のエネルギーは減少する．アンペールの法則 (3. 3. 44) を用いると，

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\mu_0} \int \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})\, dV \\ &\quad (\text{公式: } \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\, dV + \frac{1}{\mu_0} \int \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E})\, dV \end{aligned}$$

ガウスの定理と式 (22) を用いて

$$P = -\frac{1}{\mu_0}\int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} - \frac{1}{\mu_0}\int \boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,dV$$

電荷と電流が有限の範囲にあるとすれば第 1 項はゼロ．
($|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}| \sim 1/r^4$) よって，

(25) $$P = -\frac{1}{2\mu_0}\int \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}^2)\,dV = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}^2\,dV\,.$$

磁場のエネルギーを $U_m$ とすると，

(26) $$dW = Pdt = -dU_m$$

ゆえ，

(27) $$\boxed{U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int \boldsymbol{B}^2\,dV}$$ (常に正しい式) cf. (2. 9. 9)

磁場のエネルギー密度は，

(28) $$u_m = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \,. \qquad \text{cf. (2. 9. 10)}$$

- ベクトルポテンシャルを用いると，

(29) $$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^2 - \mu_0\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}$$

よって，

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\,dV + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\,dV \,.$$

第 1 項はゼロ (ガウスの定理) . ゆえに，

(30) $$U_m = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\,dV \,. \qquad \text{cf. (2. 9. 5)}$$

(定常電流のときのみ正しい . )

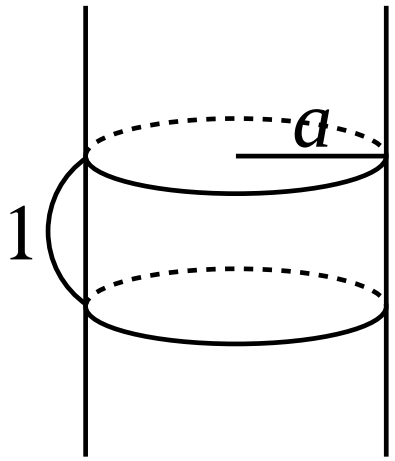
- 例 1: ソレノイドのエネルギー

§§3. 3. 4 例 2 より

(31)
$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\, \hat{\boldsymbol{z}}\,, & R < a \text{ (内部)} \\ 0\,, & R > a \text{ (外部)} \end{cases}$$

単位長さ当りのエネルギーは，

(32)
$$U_{\text{単位}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{単位}} \boldsymbol{B}^2\, dV = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 I^2\, \pi a^2 = \frac{\mu_0}{2} \pi a^2 n^2 I^2\,.$$




(単位長さ当り $n$ 回巻いてある.)