2003 年度 電磁気学 I 期末試験問題 (2004/2/16)

1. (a) 原点に，電荷 $q(>0)$ が置かれている。このとき，別の電荷 q を，無限遠のかなたから座標 $\boldsymbol{r}=(d,0,0)$ まで持ってくるのに要する仕事 (すなわち， 2 つの電荷の間に蓄えられた静電エネルギー) を表せ．

   (b) 上の事をふまえて，次の新たな設定を考えよう．図 1 に示すように，4 つの電荷 q が，長さ a の電気を通さない糸で結ばれ，正四面体の頂点に置かれている．これら 4 つの電荷の間に蓄えられている静電エネルギーを求めよ．

   (c) 次に，糸を 1 本切って電荷を安定な位置まで動かし，手を離すと，4 つの電荷は静止したままであった．この安定な配置を図で表せ．

   (d) この安定な配置で，糸が 2 本だけつながっている電荷に働く電気力を求めよ．

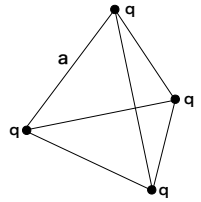

図 1: 辺の長さ a の正 4 面体

2. 半径 $R\,(>0)$ の導体の球がある．球全体の電荷は Q である．ガウスの法則を用いて、電場の大きさを球の中心からの距離 r の関数として求めよ．

3. ある空間の静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を測定したところ，次の値を得た．

$$\phi(\boldsymbol{r})=\begin{cases} 2kax & (x<-a) \\ -k(x^2+a^2) & (-a\le x\le a) \\ -2kax & (x>a) \end{cases}$$

   (a) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=(E_x,E_y,E_z)$ を求めよ．

   (b) 空間の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ．

4. 定常電流の作る磁場はアンペールの法則 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{i}$ (および $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$) で決定される．以下の問いに答えよ．

   (a) z 軸に沿って (細く無限に長い) 直線電流 I が (z 軸の正の方向に) 流れている．磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．

   (b) 上の直線電流全体を半径が a で電流と同軸の薄い導体円柱殻で包んだ．この円柱殻に電流 $-I$(z 軸の負の方向の電流 I) を流した．円柱殻上の電流密度は一様であるとして，円柱殻の内部と外部の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．

   (c) 半径 a，単位長さ当りの巻数 n の (無限に長い) ソレノイドに電流 I が流れているとき，ソレノイドの内部では $\boldsymbol{B}=\mu_0 nI\hat{\boldsymbol{z}}$，ソレノイドの外部では $\boldsymbol{B}=0$ である．($\hat{\boldsymbol{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトルで，ソレノイドの軸は z 軸であるとした．) このとき，ソレノイド内外のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を求めよ．ただし，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ とする．(ヒント: $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ とアンペールの法則の形式的な類似性に注目せよ．)

5. (真空中の) マクスウェルの方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})}{\varepsilon_0}\,, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0\,, \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{4}$$

   について以下の問いに答えよ．

   (a) 式 (1) と式 (4) から，電流密度の発散と電荷密度の時間変化の関係を表す電荷保存則を導け．

   (b) $\boldsymbol{i}=0$ として，$\boldsymbol{B}$ が満す (3 次元) 波動方程式を導け．
   (ヒント: $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\Delta\boldsymbol{B}$，$\Delta\equiv\nabla^2$．)