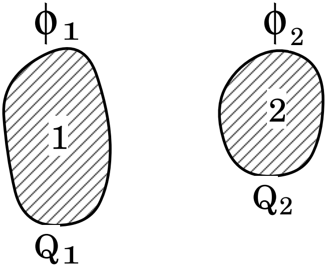
2.10 静電容量係数と相反定理

電磁気学詳論 I (2019)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 2 章 静電場

2.10.1 静電容量係数



2 つの導体から成る系を考える．導体 1(2) のポテンシャルを $\phi_{1(2)}$，電荷を $Q_{1(2)}$ とする．

(i) $\phi_1 \neq 0$，$\phi_2 = 0$ とすると，ラプラス方程式 (とその境界条件)

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = \phi_1\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = 0\,, \qquad (1)$$

の解 $\phi_1(\boldsymbol{r})$ は，ϕ_1 に比例．(ϕ_1 を 2 倍にすれば，$\phi_1(\boldsymbol{r})$ も 2 倍になる．) 電場，導体表面の電荷も比例．($\because$ $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, $E = \sigma/\varepsilon_0$.)
従って，C_{11}, C_{21} を定数として，

$$Q_1 = C_{11}\phi_1\,, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1\,. \qquad (2)$$

(ii) $\phi_1 = 0$，$\phi_2 \neq 0$ とすると，同様に

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = \phi_2\,, \tag{3}$$

の解 $\phi_2(\boldsymbol{r})$ は，ϕ_2 に比例．つまり，

$$Q_1 = C_{12}\phi_2\,, \quad Q_2 = C_{22}\phi_2\,. \tag{4}$$

(iii) $\phi_1 \neq 0$，$\phi_2 \neq 0$ のとき，

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,,\ \phi(\text{導体 1 の表面}) = \phi_1\,,\ \phi(\text{導体 2 の表面}) = \phi_2\,, \tag{5}$$

の解は $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) + \phi_2(\boldsymbol{r})$. 従って，

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2\,, \quad Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2\,. \tag{6}$$

行列で書くと，

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\,. \tag{7}$$

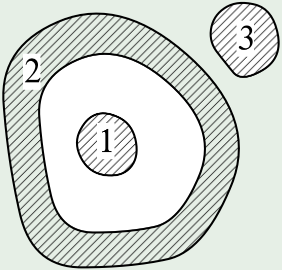
一般に n 個の導体があるとき，

静電容量係数 C_{ij}

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} . \tag{8}$$

注: C_{ij} は導体の形状，配置のみで決まる.

例: 静電遮蔽



図のような 3 つの導体を考える．導体 1 は導体 2 に完全に囲まれている．導体 1 は導体 2 によって静電遮蔽されていて，導体 3 の影響を受けない．

一般に,

$$Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3\,, \tag{9}$$

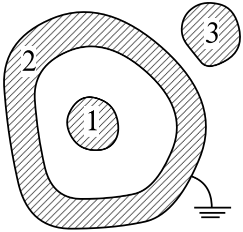
が成り立つ．$Q_1 = 0$ とすると，空洞部分も含めて導体 2 の内部に電場はなく，等電位．つまり，$\phi_1 = \phi_2$. 式 (9) より，

$$0 = (C_{11} + C_{12})\phi_2 + C_{13}\phi_3\,. \tag{10}$$

これは任意の ϕ_2，ϕ_3 について成立するので，
$C_{11} + C_{12} = 0\,, \quad C_{13} = 0$．式 (9) に代入すると，

$$Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_2)\,. \tag{11}$$

(導体 3 の影響を受けないことがわかる．) さらに，



図のように，導体 2 を接地して $\phi_2 = 0$ とすると，

$$Q_1 = C_{11}\phi_1\,. \tag{12}$$

つまり，導体 1 の電位 ϕ_1 は導体 1 の電荷 Q_1 のみで決まり，導体 2,3 に影響されない．

2.10.2 相反定理

相反定理

$$C_{ij} = C_{ji} \tag{13}$$

証明のアイデア: 導体の電荷をわずかに変化させたときの静電エネルギーの変化を 2 つの方法で評価して，結果が一致するための条件を求める．

証明: 簡単のため，$n = 2$ の場合を考える．2 つの導体の静電エネルギーは，式 (2. 9. 5) より

$$U_e = \frac{1}{2}(Q_1\phi_1 + Q_2\phi_2)\,. \tag{14}$$

式 (7) より，

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}\begin{pmatrix}C_{22} & -C_{12}\\ -C_{21} & C_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}\,. \tag{15}$$

式 (14) に代入して，

$$U_e = \frac{1}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}[C_{22}Q_1^2 - (C_{12} + C_{21})Q_1Q_2 + C_{11}Q_2^2] . \quad (16)$$

$Q_1 \to Q_1 + \delta Q_1$ としたときの U_e の変化は，δQ_1 の 1 次までで，

$$\delta U_e = \frac{\partial U}{\partial Q_1}\delta Q_1 \quad (17)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}[2C_{22}Q_1 - (C_{12} + C_{21})Q_2]}\,\delta Q_1 .$$

一方，δU_e は無限遠 $(\phi = 0)$ から導体 $1(\phi = \phi_1)$ まで，微小電荷 δQ_1 を運ぶのに必要な仕事に等しい．つまり，$\delta U_e = \phi_1 \delta Q_1$．式 (15) より，

$$\delta U_e = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}(C_{22}Q_1 - C_{12}Q_2)\delta Q_1 . \quad (18)$$

式 (17) と式 (18) を比較して，$C_{12} = C_{21}$．(証明終)

コンデンサーの静電容量

$Q_1 = -Q_2 =: Q$ として，式 (15) より，

$$\phi_1 = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} Q \,, \quad \phi_2 = -\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} Q \,. \tag{19}$$

よって，極板間の電位差は，

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{C_{11} + C_{22} + 2 C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} Q \,. \tag{20}$$

式 (2. 8. 1) と比較して，

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2 C_{12}} \,. \tag{21}$$